B

# PROBLEMATA GEOMETRICA SEXAGINTA.

*Circà Conos, Sphæras, Superficies Conicas, Sphæricasquè præcipuè versantia.*

A F. STEPHANO ANGELI

Biblioth. Scholar. VENETO, Piar. S. Pantal.

*Ordinis Jesuatorum S. Hieronymi, in Veneta Prouincia Definitore Prouinciali, elaborata.*

CVM PRIVILEGIO.


VENETIIS, MDCLVIII.



Apud Iohannem La Noù.

*DE CONSENSV SVPERIORVM.*

Ex Lib. Alph. Borell.

Illustrissimo & Excellentissimo

D. D.

# MARCO ANTONIO,

Illustrissimisque

# ANTONIO, ac LAVRENTIO

Fratribus Corrarijs.

## FR. STEPHANVS ANGELI,

Iesuatorum Ordinis in Veneta Prouincia Definitor Prouincialis P. P. P.

*EX Geometrica arbore hos fructus selegi, primogenita sanè laborum meorum indoles, ac elucubratio, Vestræ benignitatis, Illustrissimi Proceres, Numini, ac Tutamini, dicandos fore decreui. Hæ etenim feliciter exculti, erupuerunt in germina, & vsque ad maturitatis pignora succreuere. Par in omnes obsequium attraxit animum, nàm æquè meritò præstatis eximij. Nec Paris ille qui potiora diuinitatis insignia discreuit, cuinam deberetur oblatio, maiestatis, probitatis, ac Virtutis singulum ex vobis, magisquè dignum specimen seligeret. Ergo singularis deuictissimæ meæ propensionis, vestrum stemmati, ac Nomi-*

ctiori speciei inferioris. Sic Geometria, adeo super cæteras humanas facultates sua extollitur certitudine, vt Geometricę nugę à Viris, qui propriè Viris, & non sues sint, margaritæ pretiosæ censeantur. Hæc conscribo putans aliquos meæ indolis Geometras forsitan adinueniri. Etenim res Geometricas sic esurio, vt libenter perlegam ea omnia, quæ Geometriam aliqualiter redolent. Sic puto, aliquos faciliter esse reperiendos, qui hæc, quæcumque sint libenter percurrent, obseruentque illud Doctoris gentium pronuntiatum. Omnia probate, quod bonum est tenete. Hæc tibi communico cupiens laborum meorum aliqualiter periculum facere. Etenim, si aliquando mihi compertum erit, hæc tibi haud displicuisse, forsitan alia in non modica quantitate, vel his pulchriora, vel his turpiora, aliquando communicabo.

Verùm antequam opus præcipuum aggrediar, de duobus velem te monitum esse. Primum est; Euclidianorum Elementorum citationes in hoc Libello nunquam afferri. Secundum est; Sectiones per axem in Conis, Sphæris, alijsque solidis, quamuis necessariæ pro solutione Problematum, frequenter, passimque omitti. Causa primi est. Quia cum Problemata hæc circa Conos, Sphæras, Superficies Conicas, Sphæricasque præcipuè versentur, ac proinde supponant Lectorem in doctrinis Apollonij Pergæi, & Archimedis versatum, ipsum multò magis requirunt Euclidis Elementa peroptimè callere. Præterquam quod, cùm ferè nullum verbum proferatur, quòd ab Elementis non dependeat, & attamen omnia loca afferre labor

im-

immensus censeatur, malui omnia prætermittere, quàm aliqua dumtaxat adducere. Secundum consimilem causam agnoscit, nimirum hæc conscripta esse pro Lectore aliqualiter perito, cui Sectiones per axem necessariæ, sunt obuiæ. His ergo præmissis, omissisque parergis, ad erga deueniamus. Vale.

# FACVLTAS

Reuerendiſſimi Patris Generalis.

## LAVDETVR IESVS CHRISTVS.

O*PVS inſcriptum*, Sexaginta Problemata Geometrica, *compoſitum ab Admodum Reu. P. Stephano de Angelis Veneto profeſſo Noſtri Ordinis Ieſuatorum, ac in Prouincia Veneta Definitore, concedimus Typis demandari, dummodo habeat neceſſarias licentias, & approbationes, quæ de iure ſunt neceſſariæ &c. In quorum fidem præſentes manu propria ſubſcripſimus, ac proprio Noſtri Officij ſigillo muniuimus.*

*Datum Brixiæ in Noſtro Monaſterio Corporis Chriſti, die quarta Nouembris* 1657.

Fr. Antonius Nouellus Gen. Ieſuat.

Locus Sigilli.

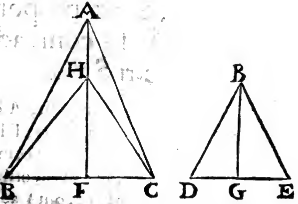
LEM-

# LEMMA PRIMVM.

## PROPOSITIO PRIMA.

### Coni habent inter ſe proportionem compoſitam ex proportione baſium, & altitudinum.

SINT duo coni, B A C, D B E, quorum axes, ſeù altitudines ſint A F, B G. Dico proportionem coni A B C, ad conum B D E, componi ex proportione A F, ad B G, & ex proportione baſis B F C, ad baſim D G E.




Super baſim B C, fiat alius conus, cuius altitudo ſit

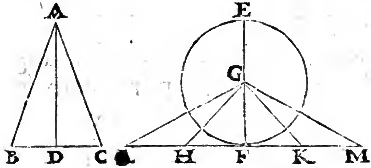
FH, ęqualis altitudini BG. Iam conus ABC, ad conum BDE, de foris ſumpto cono BHC, habet proportionem compoſitam ex proportione coni ABC, ad conum HBC, & ex proportione coni HBC, ad conum DBE: Sed vt conus ABC, ad conum HBC, ſic (propter eandem baſim BFC,) altitudo AF, ad altitudinem HF, ſeù ad BG, ei ęqualem: & vt conus HBC, ad conum DBE, ſic (propter æquales altitudines HF, & BG,) baſis BFC, ad baſim DGE. Ergo proportio coni BAC, ad conum DBE, componitur quoque ex proportione AF, ad BG, & ex proportione baſis BFC, ad baſim DGE. Quod oſtendere oportebat.

## LEMMA II. PROP. II.

Conus ad Sphæram habet proportionem compoſitam ex proportione altitudinis coni ad Semidiametrum Sphæræ, & ex proportione quadrati radij baſis coni, ad quadratum Diametri Sphæræ.

SIT conus, ABC, cuius altitudo ſit, AD, & ſit ſphæra, cuius centrum, G, diameter, EF. Dico, conum ad ſphæram habere proportionem compoſitam, ex proportione, AD, ad, FG, & ex proportione quadrati, BD, (ſi, D, ſit centrum baſis coni) ad quadratum, EF.

Intel-




Intelligantur duo coni, quorum altitudo sit, G F, semidiameter sphæræ, & sint, G H K, cuius basis diameter sit H K, æqualis, E F, & G L M, cuius basis diameter sit, L M, ipsius E F, dupla. Iam probatum est ab Archim. 1. de Sphær. & Cylindro Prop. 32. conum, H G K, esse quartam partem sphæræ, cuius diameter, E F; sed etiam est quarta pars coni, L G M, quia, & basis est quarta pars basis; ergo sphæra, & conus, L G M, sunt æquales. Ergo conus, A B C, ad hæc duo solida habet eandem proportionem. Sed proportio coni ABC, ad conum, L G M, componitur ex proportione, A D, ad, G F, & ex proportione basis, B D C, ad basim, L F M, nempè ex proportione quadrati, B D, ad quadratum, L F, seù ad quadratum E F. Ergo etiam proportio coni, A B C, ad sphæram componetur ex proportione, A D, ad, G F, & ex proportione quadrati, B D, ad quadratum, E F. Quod erat ostendendum.

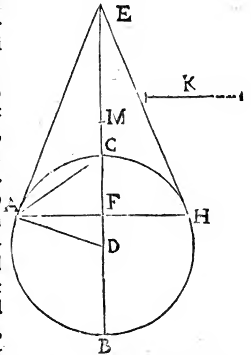
# LEMMA III. PROP. III.

Conus ſua ſuperficie conica tangens Sphæram, eſt ad portionem ſphęræ ab ipſo incluſam, vt quadratum reſidui diametri ſphęræ, ad rectangulum comprehenſum ſub dicto reſiduo, & ſub ſegmento diametri intercepto inter centrum ſphæræ, & baſim coni; vna cum rectangulo ſub ſemidiametro ſphærę, & ſub prædicta intercepta.

SIT Sphæra, ABHC, & ſit conus rectus, EAH, cuius ſuperficies conica tangat ſphæram; & omnia intelligantur ſecta per axim, adeò vt, ABHC, ſit circulus maximus; D, centrum; EA, EH, latera trianguli per axim; AFH, diameter baſis coni; BFCE, diameter circuli, & axis coni. Dico conum, EAH, ad portionem ſphæræ, ACH, ab ipſo comprehenſam, eſſe vt quadratum BF, ad rectangulum, BFD, cum rectangulo, BDF.

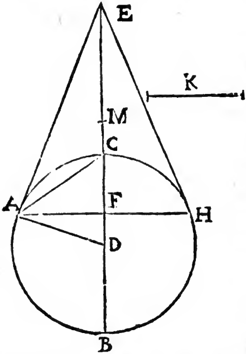
Coni

Coni ad portionem proportio componitur ex proportione coni ad sphæram, & sphæræ ad portionem: proportio coni ad sphæram componitur ex proportione, EF, ad DB, & ex proportione quadrati, AF, ad quadratum, CB, ex Propos. antec. & pariter proportio sphæræ ad portionem componitur ex proportione quadrati, BC, ad quadratum, CF, & ex proportione, DB, ad FB, continuatam, BD, vt deducitur ex




Archi. 2. de sphæra, & Cylin. Prop 4. Ergo ratio quoque coni, AEH, ad portionem, ACH, componetur ex quatuor rationibus; nempè ex ratione, EF, ad DB; DB, ad, FB, continuatam, BD; ex ratione quadrati, AF, ad, ad quadratum, CB; & quadrati, CB, ad quadratum, CF. Sed duæ rationes, EF, ad DB, & DB, ad FB, continuatam, BD, faciunt rationem, EF, ad FB, continuatam, DB. Et pariter duæ rationes quadrati, AF, ad quadratum, CB, & quadrati, CB, ad quadratum, CF, faciunt rationem quadrati, AF, ad quadratum, CF. Ergo proportio coni ad portionem, componetur

netur ex ratione, EF, ad, FB, continuatam, DB, & ex ratione quadrati, AF, seù rectanguli, BFC, ei æqualis, ad quadratum, FC, hoc est (propter eandem altitudinem, FC,) ex ratione, BF, ad, FC. Sed vt, EF, ad, FB, continuatam, BD, sic (sumpta, FD, communi altitudine) rectangulum, EFD, seù ei æquale, CFB, (nam ducta, AD, ob tangentem, EA, & angulum rectum, EAD, quadrato, FA, est æquale rectangulum, EFD, cui etiam quadrato, AF, est æquale rectãgulum,




CFB,) ad rectangulum sub, FD, in, FB, continuatam, BD. Ergo proportio coni ad portionem componetur ex ratione, BF, ad, FC, & ex ratione rectanguli, CFB, ad rectangulum sub, FD, in FB, continuatam, BD. Rursùm proportio rectanguli, CFB, ad rectangulum sub, FD, in, FB, continuatam, BD, componitur ex ratione, CF, ad, FD, & ex ratione, FB, ad, FB, continuatam, BD. Ergo à primo ad vltimum, proportio coni ad portionem componitur ex proportione, BF, ad FC; FC, ad, FD (quæ duæ faciunt

ratio-

rationem, B F, ad, F D,) & ex ratione, B F, ad, F B, continuatam, B D. Sed istæ duæ rationes componunt rationem quadrati, B F, ad rectangulum sub, F D, in F B, continuatam, B D; quod rectangulum est postea æquale duobus rectangulis, B F D, B D F. Ergo conus ad portionem est, vt quadratum, B F, ad duo rectangula, B F D, B D F. Quod erat ostendendum.

## COROLLARIVM.

Ex dictis infertur, quod diuidendo erit excessus coni supra portionem ad portionem, vt quadratum, B D, ad duo rectangula, B F D, B D F. Nam quadratum, B D, est excessus quadrati, B F, supra duo rectangula, B F D, B D F, vt consideranti patet.

## LEMMA IV. PROP. IV.

Sit recta linea, A B, secta bifariam in C, & non bifariam in, D. Dico quadratum, A D, maius esse quã sexquitertium duorum rectangulorum, A D C, A C D.

Qvoniam enim duo rectangula, A D C, A C D, sunt minora duobus rectangulis, A C B, A B C: & quadratum, A C, est tertia pars rectangulorum,

lorum, ACB, ABC; ergo erit maius quam tertia


pars rectangulorum, ACD, ADC. Ergo componendo, quadratum, AC, cum duobus rectangulis, ACD, ADC, nempè totum quadratum, AD, erit maius quam sexquitertium rectangulorum, ACD, ADC. Quod erat ostendendum.

## SCHOLIVM.

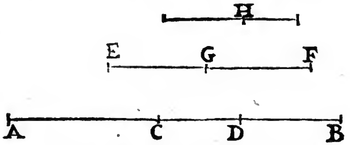
Ex dictis infertur in figura Propos. 3. conum EAH, ad portionem, ACH, habere proportionem maiorem sexquitertia. Nam in eadem propositione ostensum est conum ad portionem habere rationem quadrati, BF, ad duo rectangula, BDF, BFD. Et iam patet, BC, secari bifariam in, D, & non bifariam in, F.

## LEMMA V. PROP. V.

### Datam AB, sectam bifariam in C. rursùm secare in D, inter CB, vt quadratum AD, ad duo rectangula ACD, ADC, sit in data proportione.

Data

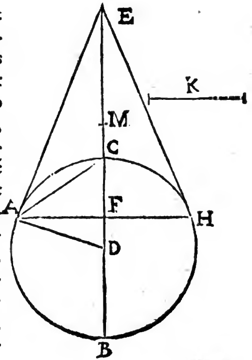
DAta proportio ſit, quam habet, E F, ad F G; quam patet debere eſſe exceſſus, ſed ex Lemmate anteced. minorem ſexquitertia. Inter E G, E F, ſit media proportionalis H. Cùm ergo E F, ſit maior quam ſexquitertia F G; ergo E G, erit maior ſubquadrupla E F; ergo erit etiam maior ſubdupla H. Si ergo fiat, vt E G, ad H, ſic A C, ad A D, punctum D, cadet inter




C, B. Fiat ergo; & aſſero punctum D, eſſe quæſitum. Quoniam enim factum eſt, vt E G, ad H, ſic A C, ad A D. Ergo, & vt quadratum E G, ad quadratum H, ſeù, vt E G, ad E F, ſic quadratum A C, ad quadratum A D. Ergo, & conuertendo, vt F E, ad E G, ſic quadratum A D, ad quadratum A C. Et per conuerſionem rationis, vt E F, ad F G, ſic quadratum A D, ad exceſſum ipſius ſuper quadratum A C, nempè adduo rectangula A C D, A D C. Quod erat faciendum.

# PROBLEMA I. PROP. VI.

Circa datam ſpheram deſcribere conum rectum includentem aliquam ſphæræ portionem, cuius ſuperficies conica tangat ſuperficiem ſphæricam, & quod conus ſit ad portionem ab ipſo incluſam in data proportione.




DAtæ ſphæræ ſit circulus maximus A B H C, cuius centrum D, diameter BC, & data proportio ſit, quam habet DC, ad K, quàm ex ſuperioribus patet, maioré eſſe ſexquitertia. Tunc datam rectam CB, diuiſam bifariá in D, diuidamus rursùm in F, inter C, D, vt quadratum BF, ſit ad duo rectangula B D F, B F D, vt BC, ad K, ex Lem-

mate

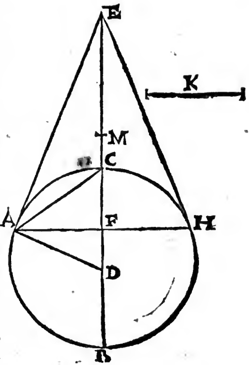
mate antecedenti ; à puncto F, erigatur perpendicularis F A, vsque ad circumferentiam, & à puncto A, ducatur A E, tangens circulum, occurrens diametro productæ in E; & intelligantur omnia reuolui circa axim E B, more geometrico, donec redeant ad principium motus. Iam patet à circulo restitui sphæram datam, & à triangulo rectangulo E A F, fieri conum rectum E A H, includentem portionem A C H, & sua superficie conica tangentem superficiem sphæricam. Dico talem conum esse quæsitum. Non immoror circa demonstrationem, quia ex præmissis est nimis clara.

## LEMMA VI. PROP. VII.

### Rectangulum, quod fit sub tangente, & sub sinu recto alicuius arcus, est maius quadrato chordæ eiusdem arcus.

SIT circulus, cuius diameter sit B C, centrum D, A E, sit tangens arcus A C, occurrens diametro productæ in E; A F, sit sinus rectus; & A C, sit chorda eiusdem arcus. Dico rectangulum E A F, maius esse quadrato A C.

Ducatur A D; & quoniam propter angulum rectum E A D, duo triangula E A D, A D F, sunt similia. Ergo erit, vt E D, ad D A, seù ad D C, ei æqualem,




ſic D A, ſeù D C, ad D F. Ergo, & diuidendo, erit vt E C, ad C D, ſic C F, ad F D. Et permutando, erit vt E C, ad C F, ſic C D, ad D F. Sed C D, eſt maior D F; ergo, & E C, erit maior C F. Ergo componendo, tota E F, erit maior dupla F C. Ergo rectangulum ſub D A, E F, maius erit rectangulo ſub D A, in duplam C F. Sed rectangulo ſub D A, in duplam C F, eſt æquale rectangulum ſub dupla D A, nempè ſub diametro B C, in C F; & huic rectangulo eſt æquale quadratum A C. Ergo rectangulum ſub D A, in E F, erit maius quadrato A C. Sed quoniam propter ſimilitudinem triangulorum D A F, E A F, rectangulum ſub D A, in E F, eſt æquale rectangulo E A F; (nam eſt, vt A E, ad E F, ſic D A, ad A F;) ergo rectangulum E A F, erit maius quadrato A C.

Quod erat oſtendendum.

SCHO-

# SCHOLIVM.

ELicitur ex dictis, & ex ostensis ab Archi., quod si tàm circulus, quàm triangulum E A F, intelligantur volui circa B E, donec redeant ad initium motus, adeò vt à circulo generetur sphæra, & à triangulo conus E A H; elicitur inquam, quod superficies conica erit maior superficie sphærica portionis ab ipso inclusa. Nam cum ostendat Archi. 1. de Sphæra, & Cylindro prop. 14. cuiuslibet coni recti superficiem esse æqualem circulo, cuius radius sit media proportionalis inter latus coni, & semidiametrum circuli basis; & pariter cum ostendat propositionibus 40. & 41. eiusdem libri, superficiem sphæricam portionis sphæræ æquale esse circulo, cuius radius sit linea ducta à polo ad circumferentiam basis; & circuli sint ad se inuicem vt quadrata semidiametrorum; sequitur, quod superficies conica erit ad superficiem sphæricam portionis, vt quadratum mediæ proportionalis inter latus, & semidiametrum suæ basis, siue erit, vt rectangulum sub latere, & semidiametro basis; hoc est in præsenti, vt rectangulum E A F, ad quadratum A C. Iam verò rectangulum E A F, ostensum est maius quadrato A C; quare, & superficies conica coni E A H, erit maior superficie sphærica portionis A C H; & insuper totus perimetro coni erit maior toto perimetro portionis.

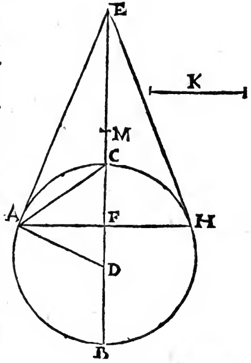
LEM.

# LEMMA VII. PROP. VIII.

Dati circuli diametrum producere, vt ab aliquo puncto eiusdem diametri ductis tangente, sinu recto, & chorda alicuius arcus, rectangulum sub tangente, & sinu recto, sit ad quadratum chordæ in data ratione possibili.

SIT datus circulus, cuius diameter, B C; centrum D; oportet producere diametrum, puta in E, vt ductis tangente E A, sinu recto A F, & chorda A C; rectangulum, E A F, sit ad quadratum A C, in data proportione.

Ex dictis patet oportere proportionem datam esse maioris inæqualitatis. Sit ergo ea, quàm habet D C, ad



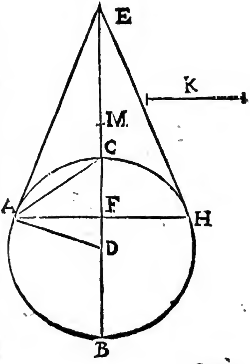

K; fiat

K; & fiat, vt exceſſus B C, ſuper K, ad K, ſic B D, ad D F. patet D F, minorem eſſe D C; nam, cum D C, ſit maior K; ergo exceſſus duplæ D C, ſuper K; nempè exceſſus B C, ſuper K, erit multò maior K; quare, & D C, ſeù B D, erit maior D F. A puncto ergo F, erigatur perpendicularis F A, & à puncto A, ducatur tangens A E, occurrens diametro in E, & iungatur A C. Dico factum eſſe, quod imperebatur. Eodem proceſſu, quo factum eſt in Lemmate anteced. oſtendetur eſſe, vt E C, ad C F, ſic C D, ad D F; & componendo, vt E F, ad F C, ſic C D, cum D F, nempè B F, ad F D. Eſt autem vt B F, ad F D, ſic B C, ad K; (nam cum factum ſit, vt exceſſus B C, ſuper K, ad K, ſic B D, ad D F; erit componendo vt B C, ad K, ſic B F, ad F D.) Ergo erit etiam, vt E F, ad F C, ſic B C, ad K; & vt antecedentium dimidia, nempe vt dimidia E F, ad F C, ſic D C, ad K. Sed vt dimidia E F, ſeù vt F M (diuiſa F E, bifariam in M,) ad F C, ſic (ſumpta communi altitudine C B,) rectangulum ſub F M, in C B, ad rectangulum B C F; nempe ad quadratum A C, ei æquale; & cum rectangulo ſub M F, B C, ſit æquale rectangulum ſub E F, in dimidiam B C, nempe in A D; ergo vt D C, ad K, ſic erit rectangulum ſub E F, in D A, ad quadratum A C. Sed rectangulo ſub E F, D A, eſt æquale rectangulum E A F, quia (propter ſimilitudinem triangulorum E A F, D A F, eſt, vt A E, ad E F, ſic D A, ad A F.) ergo, & vt D C, ad K, ſic rectangulum E A F, ad quadratum A C. Quod erat faciendum.

PRO-

# PROBLEMA II. PROP. IX.

## Circa datam ſphæram deſcribere conum rectum includentem aliquam ſphæræ portionem, & tangentem ſua ſuperficie conica ſuperficiem ſphæricam, adeò vt ſuperficies conica ſit ad ſuperficiem ſphæricam portionis ab eo incluſam in data proportione.



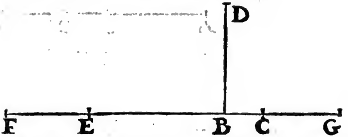

PAtet ex Scholio Propoſitionis 7. oportere proportionẽ datam eſſe maioris inęqualitatis. Sit ergo datæ ſphęræ circulus maximus, cuius centrum D, diameter B C, & data proportio ſit ea, quã habet D C, ad K. Diameter B C, producatur taliter in E, vt factis ijſdem, quæ in anteced. Lemmate, rectãgulum E A F, ſit ad

qua-

quadratum A C, in data proportione D C, ad K. Et intelligantur, consueto modo, omnia reuolui circa B E. Dico factum esse, quod imperebatur. Deducitur enim ex Arch. supra citato, superficiem coni, E A H, ad superficiem portionis A C H, esse, vt rectangulum E A F, ad quadratum A C; seù, ex factis, vt D C, ad K. Quod erat faciendum.

## LEMMA VIII. PROP. X.

Sint E B, B D, B C, tres lineæ continue proportionales; & F B, sit maior B E; & producatur F C, in G, taliter, vt rectangulum F G C, sit æquale quadrato B D. Dico E B, maiorem esse C G.

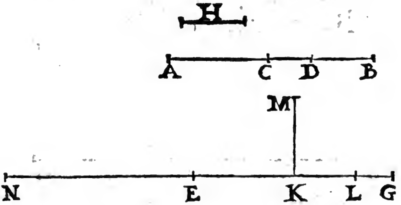



NAM rectangulum F G C, est æquale rectangulo E B C, quia ambo sunt æqualia eidem quadrato D B. Ergo erit, vt F G, maior ad B C, minorem sic E B, maior ad C G, minorem. Ergo C G, est minor E B. Quod ostendere oportebat.

# LEMMA IX. PROP. XI.

Datam rectam A B, sectam in puncto C, bifariam, rursùm in D, inter C, B, taliter diuidere, vt rectangulum ABD, sit ad rectangulum ADC, cum rectangulo sub AB, in CD, in data proportione.

Data ratio sit, quam habet AB, ad H. Ob euitandam verò confusionem; exponatur EK, æqualis A C, quæ ex vna parte continuetur in N, vt N K, sit tripla EK; & ex alia parte continuetur in L, vt K L,



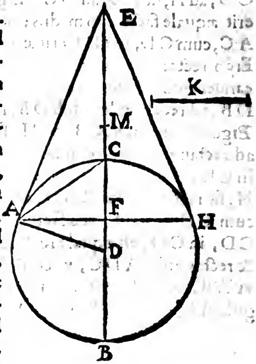

sit æqualis H; & inter E K, K L, sit media M K. Tunc (per ab alijs facta) data media proportionali MK, & data differentia extremarum N L, in ordine trium continue

tinue proportionalium, inueniantur extremæ, quæ sint N G, G L; & ipsi G L, fiat æqualis C D, quæ per Lemma, antecedens erit minor E K, seù C B. Dico punctum D, esse quæsitum.

Quoniam enim duo rectangula E K L, N G L, sunt æqualia, quia ambo sunt æqualia eidem quadrato M K; ergo est vt N G, ad K L, sic E K, ad L G. Sed E K, est æqualis A C; K L, est æqualis H; L G, est æqualis C D; & N G, est æqualis triplæ A C, C D, & H; ergo, & vt tripla A C, cum C D, & H, ad H, sic A C, seù ei æqualis C B, ad C D. Et diuidendo, vt tripla A C, cum C D, ad H, sic B D, ad D C. Ergo factum sub extremis, erit æquale facto sub medijs; nempe factum sub tripla A C, cum C D, in C D, erit æquale facto sub D B, in H. Ergo rectangulum sub C B, in D B, ad hæc, habebit eandem proportionem. Sed rectangulum sub C B, in D B, ad rectangulum sub D B, in H, est, vt C B, ad H. Ergo etiam erit, vt C B, ad H, sic rectangulum C B D, ad rectangulum sub composita ex tripla A C, cum C D, in C D. Et vt antecedentium dupla. Ergo, vt A B, ad H, sic rectangulum A B D, ad factum sub tripla A C, cum C D, in C D. Sed factum sub tripla A C, cum C D, in C D, est æquale rectangulo sub A B, in C D, & rectangulo A D C, vt consideranti patet. Ergo, & vt A B, ad H, sic erit rectangulum A B D, ad rectangula A B, C D, & A D C. Quod erat faciendum.

# LEMMA X. PROP. XII.

Sit datus circulus, cuius centrum ſit D, & diameter eius BC, ſit producta in E, & à puncto E, ducantur tangens EA, & ſinus rectus AF. Dico dimidiam EF, maiorem eſſe ſinu verſo FC.




Diuidatur EF, bifariam in M. Patet enim, quod ducta AD, propter angulum rectum EAD, & propter ſimilitudinem triangulorum rectangulorum EAD, DAF, erit, vt ED, ad AD, ſeù ad DC, ei æqualem, ſic AD, ſeù DC, ad DF. Et diuidendo, erit vt EC, ad CD, ſic CF, ad DF. Et permutando, vt EC, ad CF, ſic CD, ad DF. Sed CD, eſt maior

DF;

DF; ergo, & EC, erit maior CF. Et consequenter, dimidia totius EF, nempe MF, erit maior CF. Quod ostendere oportebat.

## LEMMA XI. PROP. XIII.

### Datis ijsdem, quæ in superiori propositione, & diuisa EF, bifariam in M. Dico esse, vt MC, ad CF, sic dimidiam CF, ad FD.

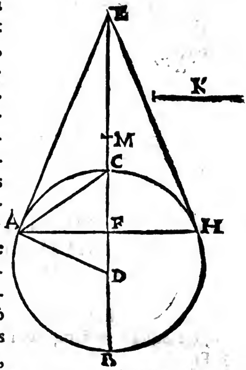
QVoniam enim duo rectangula EFD, BFC, sunt æqualia inter se, quia sunt æqualia eidem quadrato AF; ergo erit, vt EF, ad FC, sic BF, ad FD. Et antecedentium dimidia, nempe erit, vt MF, ad FC, sic dimidia BF, ad FD. Et diuidendo, erit, vt MC, ad CF, sic excessus dimidiæ BF, super FD, ad FD; hoc est, ita erit dimidia CF, ad FD; quia excessus dimidiæ BF, super FD, est æqualis dimidiæ CF. Quod patet, quia dimidia BF, est dimidia CD, cum dimidia DF; excessus autem dimidiæ CD, cum dimidia DF, super DF, est idem, ac excessus dimidiæ CD, super dimidiam DF; cùm verò CF, sit excessus totius CD, super totam DF. Ergo, & dimidia CF, erit excessus dimidiæ CD, super dimidiam DF. Quare patet propositum.

# LEMMA XII. PROP. XIV.

Dati circuli diametrum taliter producere, vt ductis tangente, sinu recto, & chorda alicuius arcus, rectangulum sub tangente, & sinu recto, vna cum quadrato sinus recti, sit ad quadrata chordæ, & sinus recti, in data proportione.

SIT datus circulus, cuius centrum D; diameter sit BC. Oportet ipsam diametrum taliter continuare in E, vt ductis tangente EA, sinu recto AF, & chorda AC; rectangulum EAF, cum quadrato AF, sit ad duo quadrata CA, AF, in data proportione.

Iam in propositione 7. patuit proportionem datam debere esse excessus. Quia, cum rectangulum EAF, ostensum sit maius quadrato AC; etiam addito communi quadrato AF, rectangulum EAF, cum quadrato AF, erit maius duobus quadratis CA, AF. Sit ergo proportio data ea, quam habet BD, ad K; & data recta BC, secta bifariam in puncto D, rursùm taliter diuidatur in pūcto F, inter C, D, vt rectangulum BCF, sit




sit ad duo rectangula BC, FD, & BFD, vt duplus excessus DB, super K, ad K, per propositionem vndecimã. Tunc à puncto F, erigatur diametro perpẽdicularis FA; & à puncto A, ducatur tangens AE, occurrens diametro in E; & ducatur AC. Dico iussum esse adimpletum. Diuidatur EF, in M, bifariam. Quoniam verò factum est, vt duplus excessus BD, super K, ad K, sic rectangulum BCF, ad rectangula BC, FD, & BFD; ergo, & vt antecedentium dimidia; nempe, vt excessus BD, super K, ad K, sic rectangulum sub BC, in dimidiam CF, ad rectangula BC, FD, & BFD, nempe ad rectangulum sub composita ex CB, BF, in FD. Sed, vt rectangulum sub BC, in dimidiam CF, ad rectangulum sub composita ex BC, BF, in FD, sic rectangulum BCM, ad rectangulum sub composita ex BC, BF, in FC. Ratio est, quia proportiones horum rectangulorum componuntur ex ijsdem proportionibus. Nam ex Lemmate antecedenti, est, vt dimidia CF, ad FD, sic

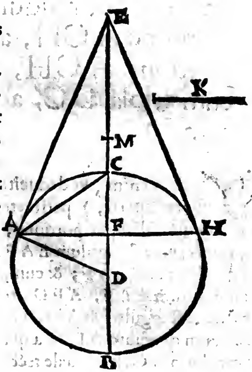
MC,

MC, ad CF; & proportio BC, ad compositam ex BC, & BF, est eadem in vtroque antecedenti ad suum consequens. Ergo, & vt excessus BD, super K, ad K, sic rectangulum BCM, ad rectangulum sub composita ex BC, BF, in FC. Ergo, & componendo, vt BD, ad K, sic rectangulum BCM, cum rectangulo sub cõposita ex BC, BF, in FC, nempe cum duobus rectangulis BCF, BFC, ad duo rectangula BCF, BFC. Sed rectangulum BCM, cum rectangulo BCF, facit vnicum rectangulum sub BC, in MF, cui postea est æquale rectangulum sub dimidia BC, nempe sub DA, in EF, duplam ipsius FM. Ergo, vt BD, ad K, sic est rectangulum sub EF, DA, cum rectangulo BFC, ad duo rectangula BCF, BFC. Sed rectangulo sub EF, DA, propter similitudinem triangulorum EAF, FAD, est æquale rectangulum EAF (vt sæpè dictum est.) Ergo, & vt BD, ad K, sic rectangulum EAF, cum rectangulo BFC, ad duo rectangula BFC, BCF. Sed rectangulum BFC, est æquale quadrato AF, & rectangulum BCF, est æquale quadrato AC. Ergo, & vt BD, ad K, sic rectangulum EAF, cum quadrato AF, ad duo quadrata AC, AF; hoc est, ex Archimede supra citato, sic superficies conica, & basis, nempe totus perimeter coni, ad superficiem sphæricam portionis, & ad basim, hoc est ad totum perimetrum portionis. Quod erat faciendum.

# PROBLEMA III. PROP. XV.

Datis iisdem, quæ in superioribus Problematibus, facere eadem, quæ ibidem; adeò vt totus perimeter coni, sit ad totum perimetrum portionis ab eo inclusam in data proportione.

Problema ex antecedentibus Lemmatibus, & ex Archimede supra citato, est facilis solutionis; quapropter in eius solutione non est amplius immorandum, sed est relinquenda industriæ Lectoris.

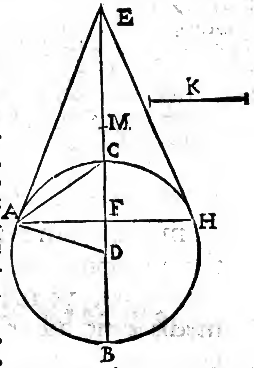


# LEMMA XIII. PROP. XVI.

Sitconus E A H, cuius ſuperficies conica tangat ſphæram ACHB, modo ſupradicto; & ECFB, ſit axis coni, & diameter ſphæræ; & diametro BC, ſit normalis AF, & D, ſi ſit centrum ſphæræ. Dico perimetrum reſidui coni, dempta portione ACH, ad perimetrum portionis ACH, eſſe, vt E D, cum tripla DC, ad triplam DC, cum DF.

QVoniam enim (vt deducitur ex Archimede locis ſupra citatis,) perimeter ſolidi excauati, ſeù reſidui coni, dempta portione, eſt ad perimetrum portionis, vt rectangulum E A F, cum quadrato AC, ad quadrata A C, A F; & cum, propter ſimilitudinem triangulorum E A F, A F D, rectangulum E A F, ſit æquale rectangulo ſub A D, ſeù D C, in E F; & pariter, cum quadrato A F, ſit æquale rectangulum B F C; & quadrato A C, ſit æquale rectangulum B C F. Ergo, & vt perimeter ſolidi excauati ad perimetrum portionis,

nis, ſic erit rectangulum DC, EF; cum rectangulo BCF, ad duo rectangula BCF, BFC. Sed rectangulum DC, EF, diuiditur in duo rectangula DCF, & DCE; & rectangulum DCE, eſt æquale rectangulo ſub ED, in CF, ( vt poſtea oſtendetur;) ergo, & perimeter ſolidi excauati erit ad perimetrũ portionis, vt rectangulum ED, CF, vna cum rectangulo DCF, & cũ rectangulo BCF, ad rectangulum BCF,




cum rectangulo BFC. Sed rectangula ED, CF; DCF, & BCF, faciunt rectangulum ſub compoſita ex ED, cum tripla DC, in CF; & pariter rectangula BCF, & BFC, faciunt rectangulum ſub compoſita ex CB, BF, in FC, nempe ſub tripla CD, cum DF, in FC. Ergo erit, vt perimeter ſolidi excauati ad perimetrum portionis, ſic rectangulum ſub ED, cum tripla DC, in CF, ad rectangulum ſub tripla CD, cum DF, in CF, nempe (propter eandem altitudinem FC,) ſic ED, cum tripla DC, ad triplam DC, cum DF. Quod erat oſtendendum.

Quòd verò supra assumptum est, nempe rectangulum D C E, esse æquale rectangulo, E D, C F, patet; quia cum, ex sæpè dictis, tres E D, D C, & D F, sint continue proportionales, facilè deducitur esse, vt E D, primam ad D C, secundam, sic E C, excessum primæ super secundam, ad C F, excessum secundæ super tertiam; quare patet rectangulum E D, C F, esse æquale rectangulo D C E.

## LEMMA XIV. PROP. XVII.

### Data media trium quantitatum continue proportionalium, inuenire extremas, vt maior cum tripla media, sit ad triplam mediam cum minore in data proportione.


DAta media sit A B, & data ratio sit, quam habet A B, ad B E, quam patet esse excessus; & inter A B, B E, sit media proportionalis H; & producatur

E A,

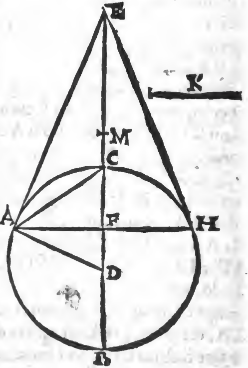
B A, in F, vt F B, ſit tripla B A; & ab ipſa F B, auferatur F K, æqualis triplæ B E ( vbicumque cadat punctum K: ) deinde data media H, & differentia extremam B K, in ordiue trium continue proportionalium, inueniantur extremæ B L, L K. Patet L K, eſſe minorem A B, nam etiam media H, eſt minor ea. Fiat ergo A D, æqualis L K, & fiat, vt A D, ad A B, ſic A B, ad A C. Dico tres C A, A B, A D, eſſe quæſitas.

Quoniam enim quadrato H, ſunt æqualia ambo rectangula B L K, & A B E; ergo iſta rectangula ſunt æqualia inter ſe; quare erit, vt B L, ad B E, ſic B A, ad L K, ſeù ad A D, quæ L K, facta fuit æqualis. Sed B L, ſunt æquales B K, cum L K, hoc eſt cum A D. Quare, & vt B K, cum A D, ad B E, ſic B A, ad A D. Et ad conſequentium tripla; ergo, vt B K, cum A D, ad triplam B E, ſic B A, ad triplam A D. Sed F K, facta fuit tripla B E; ergo erit, vt K B, cum A D, ad F K, ſic A B, ad triplam A D. Et componendo, erit vt B F, cum A D, ad F K, ſeù ad triplam B E, ſic B A, cum tripla A D, ad triplam A D. Et ad conſequentium ſubtripla. Ergo erit, vt F B, cum A D, ad B E, ſic B A, cum tripla A D, ad A D. At verò, quoniam tres C A, A B, & A D, ſunt continue proportionales, eſt vt B A, cum tripla A D, ad A D, ſic C A, cum tripla A B, ad A B. Ergo erit etiam, vt C A, cum tripla A B, ad A B, ſic F B, cum A D, ad B E. Ergo, & permutando, erit, vt C A, cum tripla A B, ad F B, cum A D, nempe ad triplam B A, cum A D, ſic A B, ad B E. Sed C A, eſt maior; B A, eſt media data, & D A, eſt minor. Quare factum eſt, quod imperebatur.

# PROBLEMA IV. PROP. XVIII.

Datis iJsdem, quæ in superioribus Problematibus, facere eadem, quæ ibidem, vt totus perimeter solidi excauati, nempe residui coni ablata portione, sit ad totum perimetrum portionis in data proportione.

DAta ratio sit, quàm habet BD, ad K: & data DC, media in ordine trium continue proportionalium inueniantur extremæ DF, minor, & DE, maior tali lege, vt sit sicut B D, ad K, sic DE, cum tripla DC, ad triplam DC, cum D F; per propositionem antecedentem. A puncto autem F, erigatur perpendicularis diametro F A, & iungatur E A, quam patet tangere circulũ, & sphæram; quia du-




cta

cta DA, cum sit, vt ED, ad DC, seù ad DA, sic DC, seù DA, ad DF; ergo triangula EAD, ADF, sunt similia. Vnde cum angulus AFD, sit rectus, etiam angulus EAD, erit rectus, & proinde EA, erit tangens. Cùm verò EA, tangat circulum; ergo, & superficies coni facti à triangulo EAF, tanget sphærá. Reliqua sunt nimis clara, ideò ex industria omittuntur.

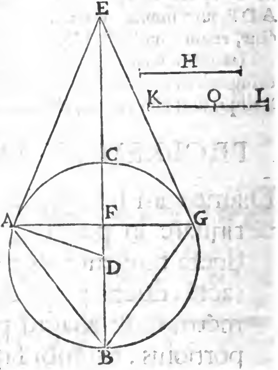
## PROBLEMA V. PROP. XIX.

Diametrum sphæræ datæ taliter continuare in puncto, vt à puncto ducta tangente, & à puncto contactus ductis perpẽdiculari ad diametrum, & alia ad polum alterius portionis, rhombi facti ex reuolutione circa diametrum, conus tangens ad reliquum conum sit in data proportione.

Datæ sphæræ sit diameter BC, centrum D; oportet autem diametrum BC, taliter continuare in E, vt ducta tangente AE, dimissa perpendiculari AF, & iuncta AB, & reuoluto triangulo EAB, adeò vt fiat rhombus EABG; conus EAG, sit ad conum

ABG,

ABG, in data proportione, quæ sit ea, quam habet BD, ad H. Secetur DC, taliter in F, vt sit sicut BD, ad H, sic CF, ad FD; & à puncto F, erecta normali FA, & ductis AB, & tangente AE, occurrente diametro in E; & intellectis conis EAG, BAG, ortis ex consueta reuolutione. Dico esse quæsitos.

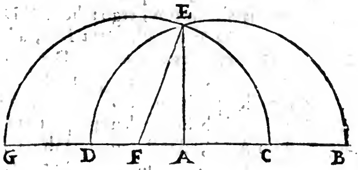



Nam, propter eãdem basim AG, conus EAG, ad conum BAG, est, vt axis EF, ad axim BF. Quoniam autem rectangula EFD, BFC, sunt æqualia, quia æqualia eidem quadrato AF; est, vt EF, ad FB, sic CF, ad FD; & CF, ad FD, facta est, sicut BD, ad H. Ergo, & vt BD, ad H, sic conus EAG, ad conum BAG. Quod erat faciendum.

# LEMMA XV. PROP. XX.

Datam rectam lineam taliter diuidere in puncto, vt rectangulum ſub tota, & ſub vna parte, ſit ad quadratum alterius partis in data proportione.

SIT data recta linea AB, & proportio data ſit ea, quam habet BA, ad AD, ei poſitam in dire-

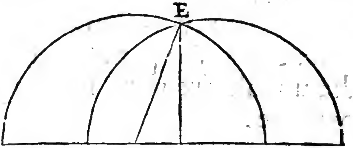



ctum. Oportet diuidere AB, in C, vt rectangulum ABC, ſit ad quadratum AC, in data proportione. Super DB, tanquam ſupra diametrum fiat ſemicirculus; & à puncto A, erigatur diametro perpendicularis AE; diuiſaque DA, bifariam in F, & iuncta FE, centro F, interuallo FE, fiat ſemicirculus GEC, ſecans AB, in C. Dico punctum C, eſſe quæſitum.

Duo enim rectangula GAC, BAD, ſunt æqualia

 inter

inter se, quia æqualia eidem quadrato A E. Ergo erit, vt B A, ad A C, sic G A, ad A D. Et diuidendo, vt

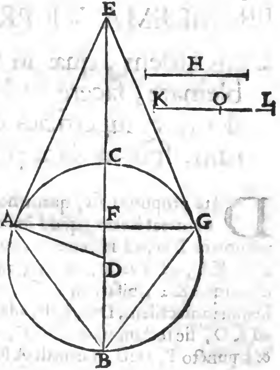



BC, ad C A, sic G D, ad D A. Sed G D, est æqualis A C, quia cum tota G F, sit æqualis totæ F C, & ablata D F, sit æqualis ablatæ F A; ergo reliqua G D, erit æqualis reliquæ A C; quare erit, & vt B C, ad C A, sic C A, ad A D. Ergo tres B C, C A, A D, erunt continue proportionales. Quare rectangulum sub B C, in D A, erit æquale quadrato A C. Ergo rectangulum A B C, ad hæc, habebit eandem proportionem. Sed rectangulum A B C, ad rectangulum sub B C, D A, est (propter eandem altitudinem B C,) vt B A, ad A D. Ergo, & vt B A, ad A D, sic rectangulum A B C, ad quadratum A C. Quod erat faciendum.

LEM-

# LEMMA XVI. PROP. XXI.

Sit circulus, cuius centrum D, diameter B C, continuata in E; E A, sit tangens, & A F, sit sinus rectus arcus A C. Dico esse, vt rectangulum D C F, ad rectangulum sub dupla D F, in D F, sic rectangulum B E C, ad rectangulum CBF.




PAtet; quia proportiones horum rectãgulorum componũtur ex ijsdem proportionibus. Nam proportio D C, ad D F, est eadem cum proportione E B, ad B F; & proportio C F, ad duplam D F, est eadem cũ proportione E C, ad C B, vt statim patebit; quare patet propositum.

 Pri-

Primum ergo, nempe, quod, vt DC, ad DF, sic sit EB, ad BF; patet, quia, cum, vt sæpè dictum est, sit, ob æqualitatem rectangulorum EFD, BFC, vt EF, ad FB, sic CF, ad FD, erit componendo, vt EB, ad BF, sic CD, ad DF.

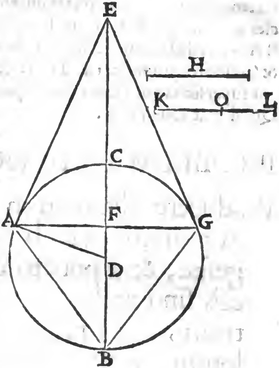
Secundum, nempè, quod sit, vt CF, ad duplam FD, sic EC, ad CB, pariter est clarum; quia cum pariter, vt sæpè dictum est, sit, vt ED, ad DC, sic DC, ad DF, erit diuidendo, vt EC, ad CD, sic CF, ad FD. Et ad consequentium dupla. Ergo vt EC, ad CB, sic CF, ad duplam FD.

## PROBLEMA VI. PROP. XXII.

### Datis ijsdem, quæ in superiori Problemate, facere eadem, quæ ibidem, vt superficies conicæ conorum, sint in data proportione.

Data proportio sit, quam habet BD, ad H, & oporteat facere, quod imperatum est. Data proportio BD, ad H, continuetur ad tertium terminum KL, adeò vt sit, vt BD, ad H, sic H, ad KL; diuisaque KL, bifariam in O; diuidatur etiam, per Lemma antecedens, DC, in F, adeò vt sit, sicut BD, ad KO, sic rectangulum DCF, ad quadratum DF; & à puncto F, erecta normali AF, ducta tangente EA,

EA, & factis conis E A G, B A G. Dico esse quæsitos nimirùm esse, vt B D, ad H, sic superficiem coni E A G, ad superficiem coni B A G.




Nam, cùm sit, vt B D, ad K O, sic rectangulum DCF, ad quadratum DF. Ergo, & vt B D, ad K L, duplam K O, sic rectangulum D C F, ad duo quadrata D F, seù ad rectãgulum sub dupla D F, in D F. Sed, vt rectãgulum D C F, ad rectangulum sub dupla D F, in D F, sic rectangulum B E C, ad rectangulum C B F; ex Lemmate antecedenti. Ergo, & vt B D, ad K L, sic rectangulum B E C, ad rectangulum C B F. Sed rectangulo B E C, est æquale quadratum tangentis E A, & rectangulo C B F, est æquale quadratum B A. Ergo, & vt B D, ad K L, sic quadratum E A, ad quadratum A B. Sed, vt B D, ad K L, sic est quadratum B D, ad quadratum H. Ergo, & vt B D, quadratum, ad quadratum H, sic est quadratum E A, ad quadratum A B. Quare, &

& vt linea B D, ad H, sic E A, ad A B. Sed (sumpta communi altitudine A F,) vt E A, ad A B, sic est rectangulum E A F, ad rectangulum B A F; vt autem rectangulum E A F, ad rectangulum B A F, sic superficies conica coni E A G, ad superficiem conicam coni B A G, vt deducitur ex Archimede primo de Sphæra & Cylindro proposit. 14. Ergo, & vt B D, ad H; sic erit superficies coni E A G, ad superficiem coni B A G. Quod erat faciendum.

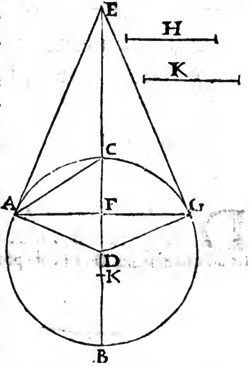
## PROBLEMA VII. PROP. XXIII.

Producere diametrum datæ sphæræ in puncto, vt ab illo ducta tangente, & à puncto contactus ductis sinu recto, & linea ad centrum; & ex reuolutione triangulorum, orto rhombo; coni rhombi sint in data proportione.

SIt data sphæra, cuius centrum D, & data ratio sit, quàm habet B *D*, ad H. Oportet producere B C, diametrum datæ sphæræ in E, vt ductis tangente E A, sinu recto A F, & semidiametro A D, & facto rhombo E A *D* G, conus E A G, sit ad conum A *D* G, vt B *D*, ad H.

Fiat,

Fiat, vt B *D*, ſimul cum H, ad H, ſic B *D*, ad D K; & inter B *D*, *D* K, inueniatur media, cui ſit æqualis *D* F; & per F, excitetur A F G, normalis B C; & à puncto A, agatur tangens A E, occurrens diametro in E; & iuncta A *D*, intelligatur rhombus, E A D G. *D*ico hunc eſſe quæſitum. Quoniam enim, vt ſæpè dictum eſt, tres E D, *D* C, *D* F, ſunt continuè proportionales; & quia F *D*, eſt media inter B D, ſeù C D, & D K; ergo, quatuor E D, D C, D F, & D K, ſunt continue proportionales. Ergo erit, vt prima E D, ad tertiam D F, ſic ſecunda C D, ad quartam D K. Sed, vt C D, ſeù B D, ad D K, ſic eſt B D, ſimul cum H, ad H. Ergo, & vt E D, ad D F, ſic B D, cum H, ad H. Et diuidendo, vt B D, ad H, ſic E F, ad F D; nempè conus E A G, ad conum A D G, propter eandem baſim A F G. Factum eſt ergo, quod erat faciendum.

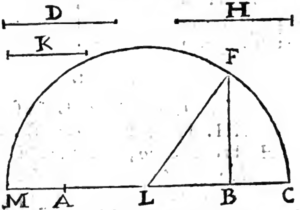



LEM-

# LEMMA XVII. PROP. XXIV.

Datis duabus rectis lineis, vnam illarum taliter producere, vt rectangulum contentum ſub compoſita ex data, & ex producta, & ſub producta; ad quadratum alterius lineæ datæ, ſit in data proportione.

Datæ duæ lineæ ſint A B, & D. Oportet taliter producere A B, in C, vt rectangulum A C B, ſit ad quadratum D, in data proportione, quæ ſit ea,




quam habet A B, ad H. Fiat ergo, vt H, ad A B, ſic D, ad K; & inter D, K, inueniatur media B F, quæ excitetur normaliter ſuper B A, à puncto B; & diuiſa A B,

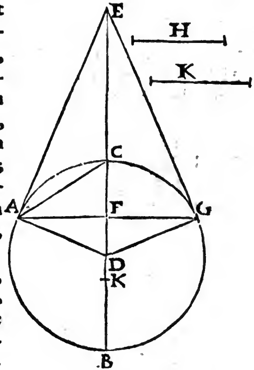
bifariam L; & ducta L F, centro L, interuallo L F, describatur ſemicirculus; & A B, protrahatur hinc inde, donec occurrat ſemicirculo in punctis M C. Dico punctum C, vel punctum M, eſſe quæſitum. Duo enim rectangula D, K, & M B C, ſunt æqualia, quia ſunt æqualia eidem quadrato B F. Sed rectangulũ M B C, eſt æquale rectangulo A C B, quia M A, eſt æqualis B C, & M B, eſt æqualis A C. Ergo etiam rectangulum D, K, erit æquale rectangulo A C B. Sed rectangulum D, K, eſt ad quadratum D, vt K, ad D. Ergo, & rectangulum A C B, eſt ad quadratum D, vt K, ad D; nempè, vt A B, ad H, (factum eſt enim ſupra conuertendo, vt A B, ad H, ſic K, ad D.) Quod erat faciendum.

## PROBL. VIII. PROP. XXV.

### Datis iiſdem, quæ in ſuperiori Problemate, facere eadem, quæ ſupra, vt ſuperficies coni E A G, ſit ad ſuperficiem coni A D G, in data proportione.

DAta proportio ſit, quam habet B D, ad H, quæ continuetur ad K, adeò vt ſit, vt B D, ad H, ſic H, ad K. Per Lemma autem antecedens, data B C, taliter continuetur in E, vt rectangulum B E C, ſit ad quadratum ſemidiametri A D, vt B D, ad K; & à pun-

cto E, ducatur tangens E A, & à puncto contactus A, ducatur A F G, normalis C B; & intelligantur coni E A G, A D G, vt in schemate. Aio istos esse quæsitos.



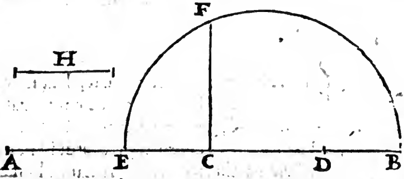

Quoniam enim, vt B D, ad K, sic rectangulum B E C, nempè, quadratum E A, ei æquale, ad quadratum A D; &, vt B D, ad K, sic quadratum B D, ad quadratum H; quare, & vt B D, quadratum, ad quadratum H, sic quadratum E A, ad quadratum A D. Vnde, & vt B D, ad H, sic erit E A, ad A D. Sed vt E A, ad A D, sic (sumpta communi altitudine A F,) rectangulum E A F, ad rectangulum D A F; & vt rectangulum E A F, ad rectangulum D A F, sic, ex Archimede, supra citato, superficies coni E A G, ad superficiem coni D A G; quare, & vt B D, ad H, sic superficies coni E A G, ad superficiem coni D A G. Quod erat faciendum.

LEM-

# LEMMA XVIII. PROP. XXVI.

Datam rectam lineam sectam in duas partes æquales, rursùm ipsam secare in partes inæquales, vt rectangulum sub inæqualibus totius partibus contentum, ad quadratum segmenti intermedij, sit in data proportione.

DAta recta linea sit A B, secta bifariam in puncto C, & data proportio sit, quam habet AC, ad H.




Oportet ipsam taliter diuidere in puncto D, vt rectangulum A D B, sit ad quadratum DC, vt A C, ad H. Fiat vt A C, cum H, ad H, sic A C, ad C E; & super diametro E B, facto semicirculo, à puncto C, erigatur perpendicularis C F, quæ erit minor C B. Fiat ergo C F, æqualis CD. Dico punctum D, esse quæsitum.

Quoniam enim factum est, vt A C, cum H, ad H, sic A C, seù ei æqualis B C, ad C E; & vt B C, ad C E, sic quadratum B C, ad quadratum C F, seù ad quadratum C D, ei æquale. Ergo, & vt A C, cum H, ad H, sic quadratum B C, ad quadratum C D. Et diuidendo, vt A C, ad H, sic excessus quadrati B C, super quadratum C D, ad quadratum C D. Sed talis excessus est æqualis quadrato D B, & duobus rectangulis C D B, quæ omnia faciunt rectangulum A D B. Ergo, & vt A C, ad H, sic rectangulum A D B, ad quadratum D C. Quod erat faciendum.

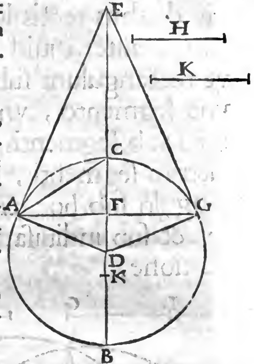
## PROBLEMA IX. PROP. XXVII.

### Datis ijsdem, quæ in superiori Problemate, facere eadem.

SIT pariter, vt in superiori Problemate, data ratio, quàm habet B D, ad H; & pariter sit continuata ad tertium terminum K, vt suprà factum est; & data recta B C, secta bifariam in D, rursùm secetur in F, inter C, D, (per Lemma antecedens) vt rectangulum B F C, sit ad quadratum F D, vt D B, ad K; & à puncto F, acta, more solito, normali A F G, & à puncto A, tangente A E, & intellectis conis E A G, A D G. Dico istos esse quæsitos. Nam cùm factum sit, vt B D, ad K, sic rectangulum B F C, seù quadratum A F, ei æquale, ad quadratum F D; & cum sit, vt B D, ad K, sic

qua-

quadratum B D, ad quadratum H. Ergo, & vt quadratum B D, ad quadratum H, sic quadratum A F, ad quadratum F D; & vt linea B D, ad lineam H, sic A F, ad F D. Sed vt A F, ad F D, sic (propter similitudinē triangulorum E A F, A F D,) E A, ad A D. Et vt E A, ad A D, sic (sumpta communi altitudine A F,) rectangulum E A F, ad rectāgulum D A F. Vt autem rectangulum E A F, ad rectangulum D A F, ità est superficies coni E A G, ad superficiē coni D A G.



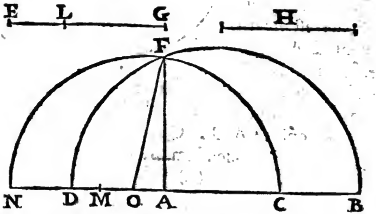

Ergo, à primo ad vltimum, erit vt B D, ad H, sic superficies coni E A G, ad superficiem coni D A G. Quod erat faciendum.

(.·.)

LEM-

# LEMMA XIX. PROP. XXVIII.

Datis duabus rectis lineis, vnam illarum taliter diuidere in puncto, vt rectangulum ſub tota, & ſub vno ſegmento; vna cum rectangulo ſub ſegmentis, ad quadratum alterius ſegmenti, vna cum rectangulo ſub hoc eodem ſegmento, & ſub indiuiſa, ſit in data proportione.



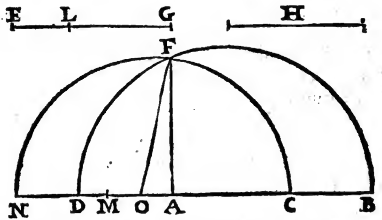

Datæ duæ rectæ lineæ ſint A B, & E G. Oportet A B, taliter diuidere in C, vt rectangulum A B C, cum rectangulo A C B, ſit ad quadratum A C, vna cum rectangulo contento ſub A C, & ſub E G, ſit

ſit in data proportione, quæ ſit ea, quàm habet A B, ad H. Fiat ergo, vt A B, cum H, ad H, ſic B A, ad A D, ei poſitam in directum; & ſuper diametrum D B, fiat ſemicirculus; & à puncto A, erigatur A F, occurrens periphæriæ in puncto F. Pariter fiat, vt B A, cum H, ad H, ſic E G, ad G L; & E L, fiat æqualis A M, quæ diuiſa bifariam in O, & iuncta O F; centro O, interuallo O F, deſcribatur ſemicirculus N F C, ſecans A B, in C, (ſecabit enim, quia cum D A, ſit minor A B, etiam F A, erit minor A B. Cùm verò O F, ſit minor duabus O A, A F, erit multò minor duabus O A, A B, nempè O B.). Dico punctum C, eſſe quæſitum. Quoniam enim rectangula N A C, B A D, ſunt æqualia, quia ambo æqualia eidem quadrato A F; & rectangulo N A C, eſt æqdale rectangulum M C A, quia N M, A C, ſunt æquales; & rectangulum M C A, eſt æquale rectangulo M A C, & quadrato A C; ergo rectangulum B A D, erit æquale rectangulo M A C, & quadrato A C. Sed, cum M A, facta ſit æqualis E L; ergo rectangulum M A C, erit æquale rectangulo contento ſub E L, & A C. Ergo rectangulum B A D, erit æquale rectangulo ſub E L, in A C, & quadrato A C. Quare communi addito rectangulo ſub L G, in A C; rectangulum B A D, cum rectangulo ſub L G, in A C, erit æquale rectangulo ſub E G, in A C, vna cum quadrato A C. Quod ſeruetur.

Verùm, quoniam factum eſt, vt B A, cum H, ad H, ſic B A, ad A D; & cum ſit, vt B A, ad A D, ſic

qua-

quadratum B A, ad rectangulum B A D, (sumpta eadem altitudinem A B.) Ergo, & vt B A, cum H, ad H, sic quadratum B A, ad rectangulum B A D.




Pariter cum factum sit, vt B A, cum H, ad H, sic E G, ad G L; & vt E G, ad G L, cum ita sit (sumpta communi altitudine A C,) rectangulum E G, A C, ad rectangulum G L, A C; ergo, & vt B A, cum H, ad H, sic rectangulum E G, A C, ad rectangulum L G, A C. Ergo in eadem proportione B A, cum H, ad H, habemus, tàm quadratum A B, ad rectangulum B A D, quàm rectangulum E G, A C, ad rectangulum L G, A C. Quare, & vt B A, cum H, ad H, sic erunt ambo antecedentia ad ambo consequentia, nempe quadratum A B, cum rectangulo E G, A C, ad rectangulum B A D, cum rectangulo L G, A C. Sed cum rectangulis B A D, & L G, & A C, ostensa sint æqualia rectangulum E G, A C, & quadratum A C. Ergo quadratum B A, cum rectangulo E G, A C, ad hæc

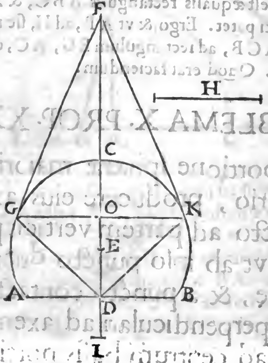
habe-

habebit eandem proportionem. Quare, & vt BA, cum H, ad H, sic quadratum BA, cum rectangulo EG, AC, ad rectangulum EG, AC, cum quadrato AC. Quare, & diuidendo, erit vt AB, ad H, sic excessus quadrati BA, & rectanguli EG, AC, super quadratum AC, & super rectangulum EG, AC, ad rectangulum EG, AC, cum quadrato AC. Sed talis excessus est æqualis rectangulis ABC, & ACB, vt consideranti patet. Ergo, & vt AB, ad H, sic rectangula ABC, ACB, ad rectangulum EG, AC, cum quadrato AC. Quod erat faciendum.

## PROBLEMA X. PROP. XXIX.

Data portione sphæræ maiori hemisphærio, producere eius axim in puncto ad partem verticis portionis, vt ab ipso puncto ducta tangente, & à puncto contactus ductis perpendiculari ad axem, & linea ad centrum basis portionis, & ex istis triangulis reuolutis circa axim, facto rhombo, coni rhombi sint ad inuicem in data proportione.

DAta portio ſit A C B, maior hemiſphærio, cuius axis ſit C D, centrũ ſphæræ E; data verò proportio ſit, quàm habet C D, ad H. Oportet producere D C, in F, vt à puncto F, ducta tangente F G, & à puncto G, ductis perpendiculari G O, & G D, ad centrum baſis portionis, & ex reuolutione, facto rhombo F G D K; conus F G K, ſit ad conum G D K, vt C D, ad H. Sit




C L, diameter ſphæræ, & datis C E, ſemidiametro, & E D, diuidatur taliter C E, in O, per Lemma antecedens, vt rectangula E C O, E O C, ſint ad rectangulum D E O, cum quadrato O E, nempè ad rectangulum D O E, vt D C, ad H; & per punctum O, erecta perpendicu-

dicu-

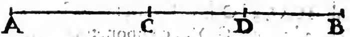
diculari G O K, & à puncto G, ducta tangente G F, intelligantur coni facti consueto modo, F G K, G D K. Dico istos esse quæsitos.

Conus F G K, ad conum G D K, ob eandem basim G O K, est, vt F O, ad O D. Sed ratio F O, ad O D, de foris sumpta O E, componitur ex ratione F O, ad O E, & ex ratione O E, ad O D. Ergo ratio coni F G K, ad conum G D K, componetur quoque ex ratione F O, ad O E, & ex ratione O E, ad O D. Sed vt F O, ad O E, sic quadratum G O, ad quadratum O E, seu rectangulum L O C, æquale quadrato G O, ad idem quadratum O E. Ergo ratio quoque coni F G K, ad conum G D K, componetur ex ratione rectanguli L O C, ad quadratum O E, & ex ratione O E, ad O D. Sed ratio rectanguli L O C, ad quadratum O E, componitur ex rationibus C O, ad O E, & L O, ad O E. Ergo ratio coni F G K, ad conum G D K, componetur quoque ex rationibus C O, ad O E, L O, ad O E, & O E, ad O D. Sed duæ rationes L O, ad O E, & O E, ad O D, faciunt rationem L O, ad O D. Ergo ratio coni F G K, ad conum G D K, componetur ex ratione C O, ad O E, & ex L O, ad O D. Sed istæ duæ rationes faciunt rationem rectanguli L O C, ad rectangulum D O E; & rectangulo L O C, sunt æqualia rectangula E C O, E O C, (vt consideranti patet.) Ergo, vt rectangulum E C O, cum rectangulo E O C, ad rectangulum D O E, nempè, vt D C, ad H, sic conus F G K, ad conum D G K. Quod erat faciendum.

# LEMMA XX. PROP. XXX.

Sit recta linea A B, secta in duobus punctis C, D. Dico rectangulum A B C, cum rectangulo A C, B D, excedere rectãgulum A D C, rectangulis A B D, A D B.

NAM rectangulum A B C, est æquale duobus rectangulis A B D, & A B, C D; rectangulum verò A B, C D, est æquale duobus rectangulis A D C, & B D C. Ergo rectangulum A B C, excedit rectangu-

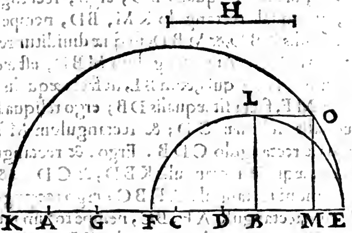


lum A D C, rectangulo A B D, & rectangulo B D C. Sed rectangulum C D B, cum rectangulum A C, D B, facit rectangulum A D B. Ergo rectangulum A B C, cum rectangulo A C, D B, excedit rectangulum A D C, duobus rectangulis A B D, & A D B. Quod erat ostendendum.

LEM-

# LEMMA XXI. PROP. XXXI.

Datam rectam lineam AB, sectam in puncto C, rursùm ipsam secare in puncto D, inter C, B; vt rectangulum ABD, cum rectangulo ADB, sit ad rectangulum ADC, in data proportione.

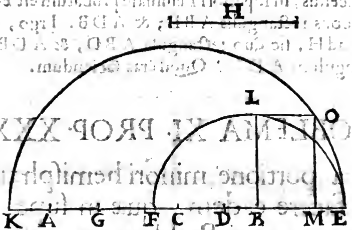



DAta proportio sit, quàm habet AB, ad H; & producatur AB, in E, vt BE, sit æqualis BC; & fiat vt AB, cum H, ad H, sic AB, ad AF; & pariter sic BC, ad AG. Rursùm producatur BA, in K, vt KA, sit æqualis GF. Tunc super diametros FE, & KE, fiant semicirculi ad eamdem partem, & à puncto B, erecta BL, perpendiculari occurrente periphæriæ circuli mino-

minoris in L; per punctum L, ducatur L O, parallela K E, occurrens periphæriæ circuli maioris in O; à quo puncto O, dimittatur diametro K E, perpendicularis O M, & ipsi M E, fiat æqualis B D. Dico punctum D. esse quæsitum.

Nam, quoniam quadrata L B, & O M, sunt æqualia, etiam rectangula K M E, & F B E, istis quadratis æqualia, erunt æqualia. Sed rectangulo F B E, est æquale rectangulum F B C, quia B E, facta est æqualis B C; & rectangulo K M E, est æquale rectangulum K M, B D, quia M E, facta est æqualis B D; ergo, rectangulum F B C, erit æquale rectangulo K M, B D, nempè duobus rectãgulis K B D, & M B D, in quæ diuiditur rectangulum K M, D B. At rectangulum M B D, est æquale rectangulo C D B; quia, cum B E, sit facta æqualis C B; & pariter M E, facta sit æqualis D B; ergo reliqua B M, erit æqualis reliquæ C D; & rectangulum M B D, erit æquale rectangulo C D B. Ergo, & rectangulum F B C, erit æquale rectangulis K B D, & C D B; & addito communi rectangulo A F, B C; ergo rectangulum F B C, cum rectangulo A F, B C, nempè totum rectangulum A B C, erit æquale rectangulis K B D, C D B, & A F, C B. Sed rectangulum A B C, diuiditur in duo rectangula, nempè A B D, & A B, C D; & pariter rectangulum K B D, diuiditur in rectangula K A, D B, & A B D. Ergo communi hinc inde ablato rectangulo A B D, remanet ex vna parte rectangulum A B, C D, æquale rectangulis K A, D B, C D B, & A F, C B. Sed quia K A, facta est æqualis G F, rectangulum K A, D B, erit

erit æquale rectangulo G F, D B; quare rectangulum A B, C D, erit æquale rectangulis G F, D B; C D B, & A F, C B. Rursùm rectangulum A B, C D, diuiditur in rectangula B D C, & A D C; ergo rursùm, communi ablato rectangulo B D C, rectangulum A D C, erit æquale rectangulis G F, D B, & A F, C B. Quod seruetur;




Quoniam verò factum est, vt A B cum H, ad H, tàm tota B A, ad totam A F, quàm ablata B C, ad ablatam A G; ergo, & reliqua C A, erit ad reliquam F G, vt tota ad totam, seu vt B A, cum H, ad H: at verò, vt B A, ad A F, sic (sumpta communi altitudine B C,) rectangulum A B C, ad rectangulum A F, B C; & vt C A, ad F G, sic (sumpta communi altitudine D B,) rectangulum A C, D B, ad rectangulum G F, D B; ergo, & vt B A, cum H, ad H, sic est tàm rectangulum A B C, ad rectangulum A F, C B, quàm rectangulum A C, D B, ad rectangulum G F, D B. Ergo, & vt B A, cum H, ad H, sic

H, sic ambo antecedentia ad ambo consequentia, nempe duo rectangula A B C, & A C, D B, ad duo rectangula A F, C B, & G F, D B, nempe ad rectangulum A D C, quod supra, istis duobus rectangulis probatum est æquale. Ergo, & diuidendo, vt A B, ad H, sic excessus duorum rectangulorum A B C, & A C, D B, super rectangulum A D C, ad rectangulum A D C. Sed iste excessus, in superiori Lemmate probatum est æquale duobus rectangulis A B D, & A D B. Ergo, & vt A B, ad H, sic duo rectangula A B D, & A D B, ad rectangulum A D C. Quod erat faciendum.

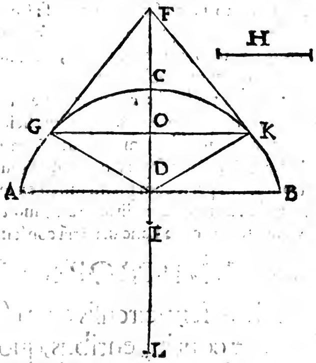
## PROBLEMA XI. PROP. XXXII.

### Data portione minori hemisphærio, facere eadem, quæ in superiori Problemate.

SINT data omnia, quæ in superiori Problemate, sed portio A C B, sit minor hemisphærio. Data E C, secta in puncto D, rursum diuidatur in O, inter C, D, vt rectangula E C O, E O C, sint ad rectangulum E O D, vt E C, ad H; & à puncto O, erecta normali G O K, & à puncto G, tangente G F, intelligantur, (prius ducta G D,) coni F G K, D G K. Quos dico esse quæsitos.

Nam eodem discursu, quo factum est in superiori

Problemate, de foris sumpta O E, probabitur conum F G K, ad conum G D K, habere rationem compositam




ex ratione rectanguli L O C, ad quadratum O E, & ex ratione O E, ad O D. Et eodem modo probabitur, ex istis rationibus componi rationem rectanguli L O C, ad rectangulum E O D. Sed rectangulum L O C, est æquale rectangulis E C O, E O C. Ergo &c. Quod erat faciendum.

# SCHOLIVM.

QVatuor antecedentia Problemata potuissent proponi sub vno tanto Problemate: sed quia in quolibet horum quatuor casuum requiruntur diuersa Lemmata, ideò, claritatis gratia, Problema distinctum est in quatuor Problemata.

Pariter hic essent tradendæ constructiones horum duorum posteriorum Problematum in superficiebus conicis; sed quoniam non habemus solutionem nisi per locum solidum; & in hoc Opere non intelligimus tradere solutiones, nisi per locum planũ; ideò ex industria omittũtur; reseruando earũ traditionẽ ad aliud tempus, quo, Deo fauente, alia circa hanc materiã conscribemus.

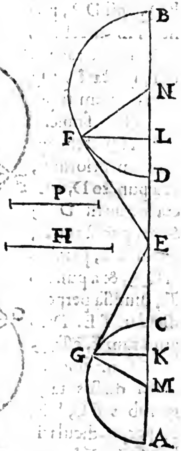
# LEMMA XXII. PROP. XXXIII.

Datis duobus semicirculis extra se positis, nec se contingentibus, quorum diametri sint sibi in directum, reperire in linea intermedia inter duos semicirculos punctum, à quo ductis tangentibus semicirculos, & à punctis cõtactus ductis sinibus rectis, abscindant isti sinus versos, seù sagittas, in data proportione.

Sint

SINT dati duo semicirculi B F D, C G A, extra se positi, nec se contingentes, quorum diametri B D, C A, sint vna linea cõtinuata. Oportet in segmẽto intermedio C D, reperire punctum E, à quo ductis tangentibus E G, E F, & pariter ductis sinibus rectis G K, F L; abscindant isti sinus versos K C, D L, in data proportione.

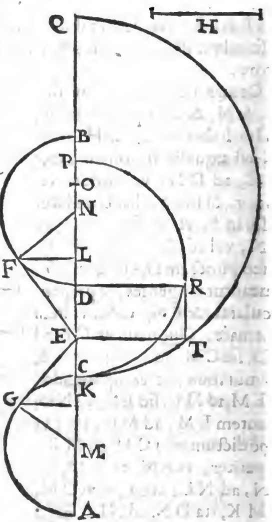
Centra semicirculorum sint M, & N, & data proportio sit, quàm habet M C, ad H; quæ, vel est æqualis ei, quam habet M C, ad D N, vel maior, vel minor. Si sit æqualis. Diuidatur C D, in E, vt sit, sicut M C, ad D N, vel ad H, sic C E, ad E D. Dico punctum D, esse quæsitũ. Ducantur tangentes, & perpendiculares, & F N, G M, vt in schemate. Quoniam vt C E, ad E D, sic C M, ad D N; ergo, & permutando, & componendo, vt E M, ad M C, sic E N, ad N D; vt autem E M, ad M C, sic (vt sæpè dictum est) C M, ad M K; & pariter, vt E N, ad N D, sic D N, ad N L; ergo, & vt C M, ad M K, ita D N, ad N L. Ergo & per conuersionem rationis, vt C M, ad C K, sic N D, ad D L. Et permutando, vt




 CM,

CM, ad N D, seù ad H, sic CK, ad DL.

Si verò proportio M C, ad H, sit minor E A, quàm habet M C, ad D N, nempè si H, sit maior N D; fiat D O, æqualis ipsi H; & fiat vt O N, ad N D, sic C M, ad D P, & O D, ad P Q, ipsi D P, positam in directum, vbicumque cadant ista puncta P, Q; factis autem super P C, Q C, semicirculis ad partem op positam prioribus, & à puncto D, erecta normali D R; & per punctum R, ducta R T, parallela Q A; & à puncto T, dimissa perpendiculari T E. Dico punctum E, esse quæsitum; hoc est, quod ductis tangentibus E G, E F, & perpendicularibus G K, F L, erit, vt M C, ad H, sic K C, ad D L.

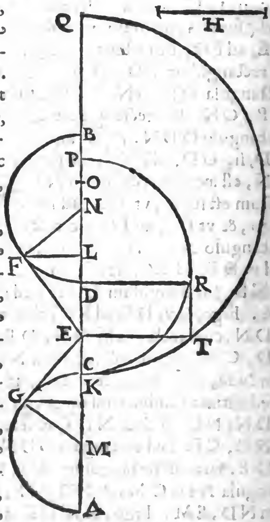



Iam quilibet faciliter proprio Marte potest cognoscere,

ſcere, quadrata D R, E T, eſſe æqualia, ac proinde æquale quoque eſſe rectangulum Q E C, rectangulo P D C. Ergo, vt Q E, ad P D, ſic D C, ad C E. Et diuidendo, vt Q P, cum D E, ad P D, ſic D E, ad E C. Sed (ſumpta communi altitudine O N,) vt Q P, cum D E, ad P D, ſic rectangula Q P, O N, & D E, O N, ad rectangulum P D, O N. Ergo, vt D E, ad E C, ſic rectangula Q P, O N, & D E, O N, ad rectangulum D P, O N. Sed rectangulum Q P, O N, eſt æquale rectangulo O D N, (quia ſupra factum eſt, vt O N, ad N D, ſic O D, ad P Q.) Et pariter rectangulum D P, O N, eſt æquale rectangulo N D, C M, (quia pariter factum eſt ſupra, vt O N, ad N D, ſic C M, ad D P.) Ergo, & vt D E, ad E C, ſic rectangulum O D N, cum rectangulo N O, D E, ad rectangulum N D, C M. Sed vt D E, ad E C, ſic eſt (ſumpta communi altitudine N D,) rectangulum E D N, ad rectangulum N D, C E. Ergo, & vt D E, ad E C, tàm eſt rectangulum O D N, cum rectangulo O N, D E, ad rectangulum N D, C M, quàm rectangulum N D E, ad rectangulum N D, E C. Ergo, & vt D E, ad E C, ſic ambo antecedentia ad ambo conſequentia; nempe rectangula O D N; N O, D E, & N D E, ad rectangula N D, C M; & N D, C E. Sed rectangula O D N; N O, D E, & N D E, faciunt rectangulum O D, N E. Et pariter rectangula N D, C M, & N D, C E, faciunt rectangulum N D, E M. Ergo, & vt D E, ad E C, ſic rectangulum O D, N E, ad rectangulum N D, E M. Quod ſeruetur.

Rur-

Rursùm vt DE, ad EC; sic (sumpta cómuni altitudine MC,) rectangulum DE, MC, ad rectangulum ECM; ergo & vt rectangulum OD, NE, ad rectangulum ND, EM, sic rectangulum DE, CM, ad rectangulum ECM. Et permutando, vt rectangulum OD, NE, ad rectangulum DE, CM, sic rectangulum ND, EM, ad rectangulum ECM. Sed, vt rectangulum OD, NE, ad rectangulũ DE, CM, sic rectangulum ODN, ad rectangulum DL, MC, (vt statim ostendetur.) Et vt rectangulum ND, EM, ad rectangulum ECM, sic rectangulum ND, MC, ad rectangulum MCK, (vt pariter statim ostendetur.) Ergo, & vt rectangulum OD N, ad rectangulum DL, CM, sic rectangulum



gulum N D, C M, ad rectangulũ M C K. Et permutando, vt rectangulũ O D N, ad rectangulũ D N, C M, nempe, vt O D, ad C M, ſic rectangulum D L, C M, ad rectãgulum M C K, nempè, D L, ad C K. Ergo, & conuertendo, vt M C, ad D O, ſeù ad H, ſic K C, ad D L. Quod &c.

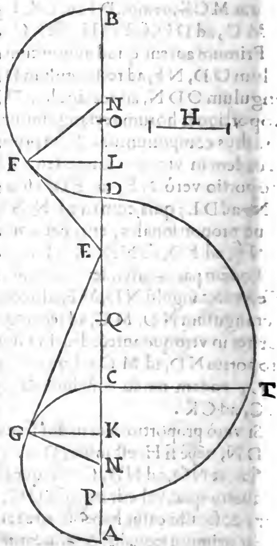
Primum autem quod aſſumptum eſt, nempè rectangulum O D, N E, ad rectangulum D E, C M, eſſe, vt rectangulum O D N, ad rectãgulum D L, C M· patet, quia proportiones horum rectangulorum ex ijſdem proportionibus componuntur. Nam proportio D O, ad C M, eſt eadem in vtroque antecedente ad ſuum conſequens. Proportio verò N E, ad E D, eſt æqualis proportioni D N, ad D L; quia, cum tres E N, N D, & N L, ſint continue proportionales, erit, per conuerſionem rationis, vt N E, ad E D, ſic N D, ad D L.

Eodem pacto oſtendetur ſecundum aſſumptũ, nempe eſſe, vt rectangulũ N D, M E, ad rectangulum E C M, ſic rectangulum N D, M C, ad rectangulum M C K. Nam pariter in vtroque antecedenti ad ſuum conſequens, eſt proportio N D, ad M C, reliqua verò proportio M E, ad E C, eodem modo concludetur æqualis proportioni M C, ad C K.

Si verò proportio data maior ſit ea, quam habet M C, ad D N; nẽpè ſi H, eſt minor D N. Fiat ei æqualis D O; & fiat, vt N O, ad N D, ſic vtraque ſimul O D, & C M, ad aliam; quæ, vel erit æqualis D C, vel maior, vel minor; & ſic iſte caſus habebit tres caſus.

Sit primum æqualis; & diuidatur D C, in Q, in partes conſequentes proportionis; nẽpè ſit, vt N O, ad N D, ſic

sic MC, ad CQ, & DO, ad DQ; & ipsi CQ, fiat æqualis CP; & super diametro DP, fiat semicirculus DTP, ad partem oppositā prioribus; ac à pūcto C, erigatur normalis CT. Patet CT, maiorem esse CP, seù CQ, & minorem CD. Fiat ei æqualis CE. Dico punctum E, esse quæsitum. Sint ergo ductæ tangentes, & perpendiculares, vt in schemate. Quoniam tres PC, CT, & CD, sunt continue proportionales. Ergo, & tres CQ, CE, & CD, eis æquales, erunt continuè proportionales. Quare erit, vt DC, ad CE, sic CE, ad CQ. Et diuidendo, vt DE, ad EC, sic EQ, ad QC. Et vt vnum ante-



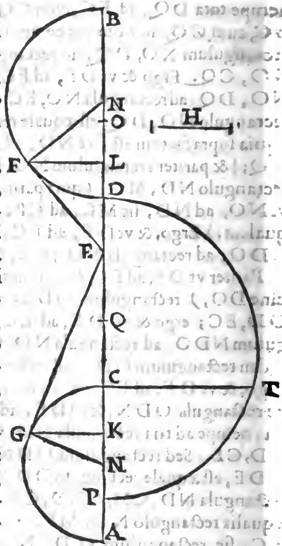

cedden-

cedentium ad vnum consequentium, nempè vt D E, ad E C, sic ambo antecedentia ad ambo consequentia, nempe tota D Q, ad E C, cum C Q. Sed vt D Q, ad E C, cum C Q, sic (sumpta communi altitudine N O,) rectangulum N O, D Q, ad rectangula N O, E C, & N O, C Q. Ergo & vt D E, ad E C, sic rectangulum N O, D Q, ad rectangula N O, E C, & N O, C Q. Sed rectangulo N O, D Q, est æquale rectangulum N D O, (quia supra factum est, vt N O, ad N D, ita D O, ad D Q;) & pariter rectangulum N O, C Q, est æquale rectangulo N D, M C, (quia pariter supra factum est, vt N O, ad N D, sic M C, ad C P, seù ad C Q, ei æqualem.) Ergo, & vt D E, ad E C, sic rectangulum N D O, ad rectangula N O, C E, & N D, C M.

Pariter vt D E, ad E C, sic (sumpta communi altitudine D O,) rectangulum O D E, ad rectangulum O D, E C; ergo & vt D E, ad E C, sic est tàm rectangulum N D O, ad rectangula N O, C E, & N D, C M, quàm rectangulum O D E, ad rectangulum O D, E C. Ergo, & vt D E, ad E C, sic ambo antecedentia, nempe rectangula O D N, & O D E, ad ambo consequentia, nempe ad tria rectangula N D, C M; N O, C E, & O D, C E. Sed rectangulum O D N, cum rectangulo O D E, est æquale rectangulo O D, N E; & pariter tria rectangula N D, C M, & N O, C E, & O D, C E, sunt æqualia rectangulo N D, M E. Ergo, & vt D E, ad E C, sic rectangulum O D, N E, ad rectangulum N D, M E.

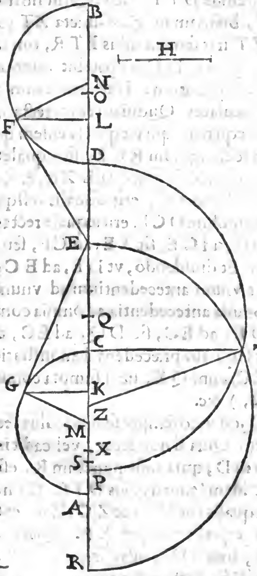
**Rursùm, vt D E, ad E C, sic (sumpta communi alti-**

tudine CM,) rectangulum DE, CM, ad rectangulum ECM. Ergo, & vt rectangulũ OD, NE, ad rectangulũ ND, ME, ſic rectangulũ DE, MC, ad rectangulum ECM. Et permutando, vt rectangulum OD, NE, ad rectangulũ DE, CM, ſic rectangulum ND, ME, ad rectangulũ ECM. Sed, vt rectangulũ OD, NE, ad rectangulũ DE, CM, ſic rectangulum ODN, ad rectangulum DL, CM, vt patet ex probatione ſuperiori primi aſſumpti; & vt rectangulum ND, ME, ad rectangulum ECM, ſic rectangulum ND, MC, ad rectangulum MCK, vt patet ex probatione ſecundi aſſumpti.




Ergo

Ergo, & vt rectangulum ODN, ad rectangulum DL, CM; sic rectãgulum ND, CM; ad rectangulũ MCK. Et permutando, vt rectangulũ ODN, ad rectãgulũ ND, MC, nempe, vt DO, ad MC; sic rectangulum DL, CM, ad rectangulum MCK, nempè sic DL, ad CK. Quare, & conuertendo, vt MC, ad DO, seù ad H, sic KC, ad DL. Quod erat faciendum.




SI autem illa alia sit maior DC. Sit hæc DX; & pariter DX, distinguatur in Q, in partes proportionales, nempè fiat, vt NO, ad ND, sic tàm OD, ad DQ, quã MC, ad QX. & ipsi QX, fiat æqualis CP, vbicumque cadant tria

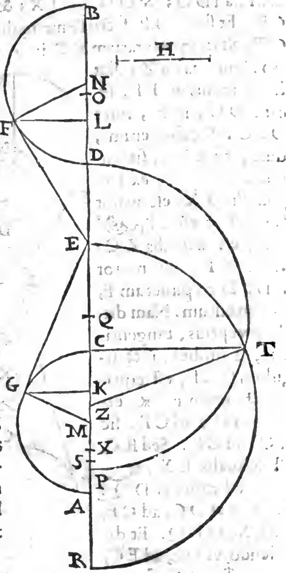
 pun-

puncta Q, X, P. Deinde super diametrum D P, fiat semicirculus D T P; & erigatur normalis C T, ac diuisa C X, bifariam in Z, & iuncta Z T; centro Z, interuallo Z T, fiat semicirculus E T R, qui semper secabit D C; inter puncta D, C, vt patebit inferius. Dico punctum E, esse quæsitum. Ducantur enim tangentes, & perpendiculares. Quoniam enim rectangula D C P, E C R, sunt æqualia, quia æqualia eidem quadrato C T; & cùm rectangulum R C E, sit æquale rectangulo X E C, quia, cum Z E, sit æqualis Z R, & Z X, sit æqualis Z C, ergo reliqua E C, erit æqualis reliquæ X R. Ergo, & rectangulum D C P, erit æquale rectangulo X E C. Ergo vt D C, ad C E, sic X E, ad C P, seù ad Q X, ei æqualem. Et diuidendo, vt D E, ad E C, sic E Q, ad Q X. Et vt vnum antecedentium ad vnum consequentium, ita omnia antecedentia ad omnia consequentia; nempè, vt D E, ad E C, sic D Q, ad E C, cum Q X. In reliquis sequatur præcedens demonstratio, nempe, vt D Q, ad E C, cum Q X, sic (sumpta communi altitudine O N,) &c.

Quòd verò semper semicirculus secet D C, inter C, D, patet. Quia si non secat, vel cadit in D, vel vltra D. Non in D; quia tunc punctum R, esset idem, ac P; & esset idem semicirculus D T P. Cùm ergo tota Z D, esset æqualis toti Z P; & Z C, Z X; ergo, & reliqua D C, esset æqualis reliquæ X P. Quare, addita communi C X, tota D X, esset æqualis C P. Quod implicat; quia C P, facta est æqualis tantum Q X, quæ est pars D X. Maius absurdum concluderetur si punctum E,

cade-

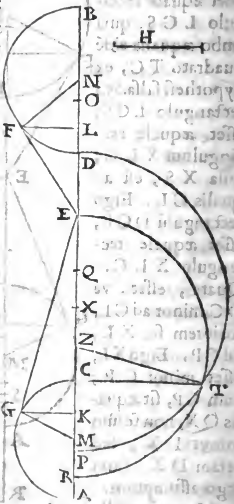
caderet vltra D, v. b. in L; quia tunc punctum R, caderet vltra P, putà in S; & tunc rectangulum D C P, eſſet æquale rectãgulo L C S, quia ambo æqualia eidẽ quadrato T C, ex hypotheſi falſa. Sed rectangulo L C S, eſſet æquale rectangulum X L C, quia X S, eſt æqualis C L. Ergo rectangulũ D C P, eſſet æquale rectangulo X L C. Quare, eſſet, vt D C, minor ad C L, maiorem ſic X L, ad C P. Ergo X L, eſſet minor C P; cum C P, ſit æqualis Q X, non ſolùm minor L X, ſed etiam D X. Patet ergo aſſumptum.




SI tandem illa alia ſit minor D C. Sit hæc D X, & diſtinguatur in

Q, in

Q. in partes proportionis, vt sit sicut N O, ad N D, sic C M, ad D Q; & O D, ad Q X; & D Q, fiat æqualis C P. Et super D P, facto semicirculo, & erecta normali C T, diuisaque bifariam X C, in Z, & iuncta Z T; centro Z, interuallo Z T, fiat semicirculus R T E, secans D C, in E, inter D, C. Secabit enim, quia, cùm Z P, sit minor Z D, quia, ex hypothesi D X, est maior D Q, hoc est C P; & X Z, est æqualis Z C; vnde Z T, est minor Z D. Dico punctum E, esse quæsitum. Nam ductis, vt prius, tangentibus, & sinibus; rectangulum D C P, est æquale rectangulo E C R. Ergo, vt D C, ad C E, sic R C, ad C P. Sed R C, est æqualis E X, & C P, est æqualis D Q. Ergo, & vt D C, ad C E, sic E X, ad D Q. Et diuidendo, vt D E, ad E C,




sic excessus X E, super D Q, ad D Q. Et vt vnum antecedentium, ad vnum consequentium, ita omnia ante-

tece-

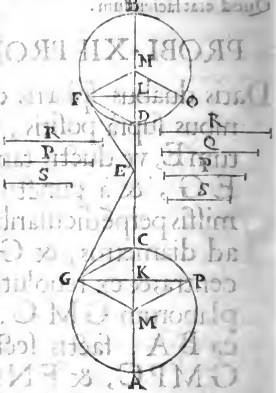
tecedentia, ad omnia consequentia; nempe, vt D E, ad E C, sic excessus D X, super D Q, nempè Q X, ad D Q, cum E C. Sed, vt Q X, ad D Q, cum E C, sic (sumpta communi altitudine O N,) &c. vt suprà factum est, & concludetur propositum. Factum est ergo in omnibus casibus, vt M C, ad H, sic K C, ad D L. Quod erat faciendum.

## PROBL. XII. PROP. XXXIV.

Datis duabus sphæris cum conditionibus suprà positis, reperire punctum E, vt ductis tangentibus E F, E G; & à punctis contactus dimissis perpẽdicularibus F L, G K, ad diametros, & G M, F N, ad centra; & ex reuolutione sectorum planorum G M C, F D N, circa B A; factis sectoribus solidis G M P C, & F N O D; isti sint ad inuicem in data proportione.

Data proportio sit, quàm habet R, ad S; & fiat, vt C M, ad D N, sic R, ad Q; & pariter fiat, vt R, ad Q, sic Q, ad P. Deinde (intellectis prius sphæris

ris sectis per axem more solito) per Lemma antecedens, inueniatur punctum E, vt ductis tangentibus E F, E G, & perpendicularibus G K, F L, sit, vt P, ad S, sic K C, ad D L; & intelligantur sectores, vt in schemate. Dico punctum E, esse quæsitum. Cùm enim factum sit, vt R, ad Q; sic M C, ad D N; ergo, vt quadratum R, ad quadratum Q, nempe, vt R, ad P, sic quadratum M C, ad quadratum D N. Verùm, cùm proportio R, ad S, componatur ex proportione R, ad P, & P, ad S; & vt R, ad P, sic sit quadratum M C, ad quadratum D N; & vt P, ad S, sic K C, ad D L. Ergo proportio R, ad S, componetur quoq; ex proportione quadrati




M C, ad quadratum D N, hoc est ex dupla proportione M C, ad D N, & ex proportione K C, ad D L. Sed vt vna proportio M C, ad D N, sic A C, dupla C M, ad D B, duplam D N. Ergo proportio R, ad S, componetur ex triplici proportione, nempe ex proportione

M C,

M C, ad D N, ex proportione A C, ad D B, & ex proportione K C, ad D L. Sed proportiones A C, ad D B, & K C, ad D L, faciunt rationẽ rectanguli A C K, ad rectangulum B D L; nempe (ductis G C, F D) quadrati G C, ad quadratum F D. Ergo proportio R, ad S, componetur ex proportione quadrati G C, ad quadratum F D, & ex proportione M C, ad D N. Sed hæ duę proportiones componunt rationem sectoris G M P C, ad sectorem N F D O, vt elicitur ex Archimede lib. 1. de Sphæra, & Cylindro propos. 42. & ex nostra prima propositione huius. Ergo, vt R, ad S, sic sector G M P C, ad sectorem F D O N. Quod erat faciendum.

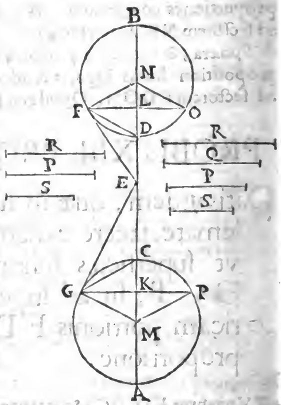
## PROBL. XIII. PROP. XXXV.

Datis iisdem, quæ in superiori Problemate, facere eadem, quæ ibidem, vt superficies sphærica portionis G C P, sit ad superficiem sphæricam portionis F D O, in data proportione.

IVngantur F D, G C; & data proportio sit, quàm habet R, ad S; & fiat, vt A C, ad D B, sic R, ad P, &, per propositionem 33. diuidatur C D, in E, vt factis omnibus, quæ ibidem, sit, vt P, ad S, sic K C, ad D L;

K &

& reuolutis omnibus, & factis portionibus G C P, F D O. Dico esse quæsitas. Nam proportio R, ad S, componitur ex proportione R, ad P, & ex proportione P, ad S; vt autem R, ad P, sic A C, ad D B; & vt P, ad S, sic K C, ad D L; ergo quoque proportio R, ad S, componetur ex proportione A C, ad D B, & K C, ad D L, nempe, ex proportione rectanguli A C K, ad rectangulum B D L, (cum proportiones horũ rectãgulorum componantur ex ijsdem proportionibus) ergo, vt R, ad S, sic rectãgulum A C K, ad rectangulum B D L, nempè, sic quadratũ G C, ad quadratum F D; nempè, sic superficies sphærica portionis G C P, ad superficiem sphęricã portionis F D O; vt elicitur ex Archimede primo, de Sphæra, & Cylindro proposit. 40. & 41. Ergo factum est; quod faciendum erat.




SCHO-

## SCHOLIVM.

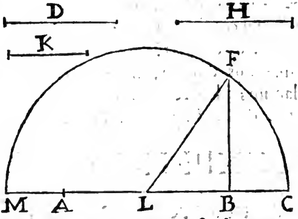
MVlta alia Problemata essent soluenda circa hanc materiam; sed quia eorum solutiones non tenemus, nisi, vel confusas, vel per locum solidũ; & cùm in præsenti, vel careamus tẽpore ipsas distinguendi, vel non intelligamus tradere, nisi Problemata soluta per locum planum; ideò eorum solutiones ad aliud opus, quod, Deo fauente, imprimetur, remittimus.

## LEM. XXIII. PROP. XXXVI.

Datis duabus rectis lineis, vnam illarum taliter producere, vt quadratum compositæ ex data cum producta, vna cum quadrato productæ, & cum rectangulo contento sub tota cum producta, & sub producta, sit ad quadratum alterius datæ lineæ in data proportione.

DAtæ duæ rectæ lineæ sint A B, & D; & data proportio sit, quàm habet A B, ad H; oportet producere A B, in C, vt quadratum A C, cum quadrato C B, & cum rectangulo A C B, sit ad quadratum D, vt A B, ad H. Patet proportionem A B, ad H, debere esse

maiorem ea, quàm habet quadratum A B, ad quadratum D. Fiat, vt H, ad tertiam partem A B, sic quadra-




tum D, ad quadratum K. Patet faciliter, ex determinatione Lemmatis, quadratum K, maius esse tertia parte quadrati A B. Erigatur ergo à puncto B, linea B F, perpendiculariter super A B, quæ possit excessum quadrati K, super tertiam partem quadrati A B; & secta A B, bifariam in L, & iuncta L F; centro L, interuallo L F, fiat semicirculus, cui occurrat A B, hinc inde producta in punctis M, C. Dico punctum C, esse quæsitum. Quoniam enim rectangula M B C, & A C B, sunt æqualia, & rectangulum M B C, est æquale quadrato F B; ergo rectangulum A C B, erit æquale quadrato B F. Et addita communi tertia parte quadrati A B, ergo rectangulum A C B, cum tertia parte quadrati A B, erit æquale quadrato B F, cum tertia parte quadrati A B, nempè quadrato K. Ergo quadratum D, ad hæc habebit eandem rationem. Sed quadratum D, factum est

est ad quadratum K, vt H, ad tertiam partem A B. Ergo, & vt H, ad tertiam partem A B, sic quadratum D, ad rectangulum A C B, cum tertia parte quadrati A B. Ergo, & ad consequentium tripla, nempe, vt H, ad A B, sic quadratum D, ad quadratum A B, & ad tria rectangula A C B. Et conuertendo, vt A B, ad H, sic quadratum A B, cum tribus rectangulis A C B, ad quadratum D. Sed tria rectangula A C B, cum quadrato A B, faciunt quadratum A C, quadratum C B, & vnum rectangulum A C B; nam duo rectangula A C B, cum quadrato A B, faciunt duo quadrata A C, C B, vt consideranti patet. Ergo, & vt A B, ad H, sic duo quadrata A C, C B, cum rectangulo A C B, ad quadratum D. Producta est ergo A B, in C, &c. Quod erat faciendum.

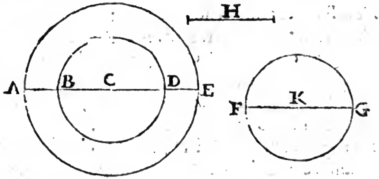
## PROBL. XIV. PROP. XXXVII.

### Data sphæra, & data recta linea, describere orbem solidum, cuius crassities sit data linea, qui ad spheram datam, sit in data proportione possibili.

HOC Problema est determinatum, & determinatio, quæ patebit ex processu demonstrationis, est, quod proportio data sit maior ea, quam habet cubus

bus

bus datæ lineę, ad cubum semidiametri sphæræ datæ. Sit data ergo sphæra, cuius semidiameter F K, & data recta linea sit A B, & oporteat facere, quod proponitur. Data proportio sit, quàm habet A B, ad




H; & data linea A B, taliter producatur in C, vt sit, sicut F K, ad H, sic quadrata A C, C B, cum rectangulo A C B, ad quadratum F K. Patet enim, ex determinatione Problematis, quod A B, poterit produci, cum proportio F K, ad H, maior sit ea, quam habet quadratum A B, ad quadratum F K. Nam si esset æqualis; cum proportio A B, ad H, componatur ex proportione A B, ad F K, & F K, ad H; vt autem F K, ad H, cum sic sit, ex suppositione, quadratum A B, ad quadratum F K. Ergo proportio A B, ad H, componeretur ex proportione A B, ad F K, & ex proportione quadrati A B, ad quadratum F K, quæ duæ faciunt rationem cubi A B, ad cubum F K; quod est contra determinationem Problematis; quia proportio A B, ad H, statuitur maior ea, quàm habet cubus A B, ad cubum F K.

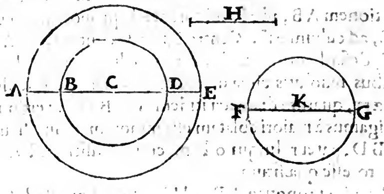
Et

Et multò maius absurdum concluderetur, si proportio esset minor. Nam, eodem discursu, concluderetur proportionem A B, ad H, minorem esse proportione cubi A B, ad cubum F K. Centro igitur C, interuallis A C, C B, describantur circuli, quorum diametri A E, B D; quibus reuolutis circa diametros, descriptæ erunt duæ sphæræ, quarum diametri itidem A E, B D. Si ergo intelligamus à maiori ablatam esse minorem, cuius diameter B D, patet relinqui orbem, cuius crassities est A B. Assero esse quæsitum.

Etenim proportio A B, ad H, vt dictum est, de foris sumpta F K, componitur ex proportione A B, ad F H, & F K, ad H. Vt autem F K, ad H, sic facta sunt duo quadrata A C, C B, cum rectangulo A C B, ad quadratum F K. Ergo quoque, proportio A B, ad H, componetur ex proportione A B, ad F K, & ex proportione quadratorum A C, C B, cum rectangulo A C B, ad quadratum F K. Sed istæ proportiones componunt proportionem excessus cubi A C, super cubum B C, ad cubum F K; (vt statim patebit.) Vt autem excessus cubi A C, super cubum C B, ad cubum F K, sic orbis, cuius crassities A B, ad sphæram, cuius semidiameter F K. (Nam, vt cubus A C, ad cubum B C, sic sphæra A E, ad sphæram B D. Et diuidendo, vt orbis ad sphæram, sic excessus cubi A C, super cubum B C, ad cubum B C. Vt autem cubus B C, ad cubum F K, sic sphæra B D, ad sphæram F G. Ergo, ex æquali, vt excessus cubi A C, super cubum B C, ad cubum F K, sic orbis, cuius crassities A B, ad sphæram F G.) Ergo, & vt A B, ad H,

sic

ſic orbis ad ſphæram F G. Quod faciendum proponebatur.



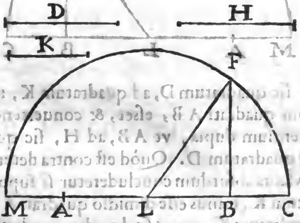

Quòd verò illæ duæ proportiones A B, ad F K, & duorum quadratorum A C, C B, cum rectangulo A C B, ad quadratum F K, componant rationem exceſſus cubi A C, ſuper cubum B C, ad cubum F K; ſeù, quod factum ſub A B, in duo quadrata A C, C B, & in rectangulum A C B, ſit æquale exceſſui cubi A C, ſuper cubum B C; patet. Quia, duo quadrata A C, C B, cum rectangulo A C B, diuiduntur in quadratum A B, in tria rectangula A B C, & in tria quadrata B C; in quæ omnia ſi ducatur A B, fient, cubus A B, tria facta ſub A B, in quadratum B C, & tria facta ſub B C, in quadratum A B; nempè exceſſus cubi A C, ſuper cubum B C. Oſtenſum eſt enim ab alijs, ſed præcipuè ab incomparabili Viro Bonauentura Caualerio Præceptore meo amantiſſimo, libro ſecundo Geometriæ indiuiſibilium Propoſit. 38. quod ſi recta linea ſecta ſit in puncto, cubus totius æquatur cubis partium, & tribus factis ſub qualibet partium in quadratum reliquæ.

Quod

Quòd verò oporteat proportionem datam maiorem esse ea, quam habet cubus A B, ad cubum F K, patuit ex processu Problematis, alioquin non potuisset construi.

## LEM. XXIV. PROP. XXXVIII.

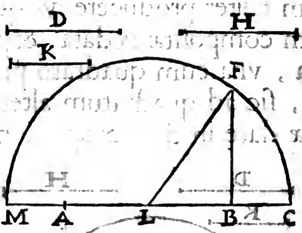
Datis duabus rectis lineis, vnam illarum taliter producere, vt quadratum compositæ ex data, & producta, vna cum quadrato productæ, sic ad quadratum alterius lineæ datę in data proportione.




Datæ duæ rectæ lineæ sint A B, & D; oportet producere A B, in C, vt duo quadrata A C, C B,

L sint

ſint ad quadratum D, in data proportione, quæ ſit ea, quam habet A B, ad H. Patet oportere hanc maiorem eſse ea, quam habet quadratum A B, ad quadratum D. Diuidatur A B, bifariam in L, & fiat, vt H, ad B L, ſic quadratum D, ad quadratum K. Patet, ex determinatione Lemmatis, quadratum K, maius eſse dimidio quadrati A B. Nam, ſi non eſſet maius, vel eſset æquale, vel minus. Non æquale; quia, cùm ſit, vt H,




ad B L, ſic quadratum D, ad quadratum K, nempe ad dimidium quadrati A B; eſſet, & conuertendo, & vt antecedentium dupla, vt A B, ad H, ſic quadratum A B, ad quadratum D. Quòd eſt contra determinationem. Maius abſurdum concluderetur ſi ſupponeretur quadratum K, minus eſſe dimidio quadrati A B. Ergo cùm quadratum K, maius ſit dimidio quadrati A B, linea potens exceſſum quadrati K, ſuper dimidium quadrati A B, ducatur normaliter ſuper A B, à puncto B,

&

& ſit B F; & iuncta L F, centro L, interuallo L F, fiat ſemicirculus, cui occurrat A B, hinc inde producta in M, & C. Dico punctum C, eſſe quæſitum.

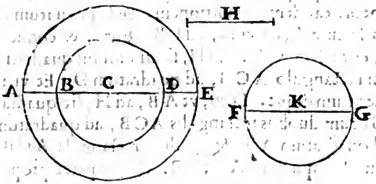
Cùm enim rectangulum M B C, ſeù A C B, ei æquale, ſit æquale quadrato F B, addito dimidio quadrati A B; ergo rectangulum A C B, cum dimidio quadrati A B, erit æquale dimidio quadrati A B, & quadrato F B; nempè quadrato K. Ergo quadratum D, ad hæc habebit eandem proportionem. Sed quadratum D, ad quadratum K, eſt vt H, ad L B. Ergo, & conuertendo, erit etiam, vt L B, ad H, ſic dimidium quadrati A B, cum rectangulo A C B, ad quadratum D. Et vt antecedentium dupla. Ergo, vt A B, ad H, ſic quadratum A B, cum duobus rectangulis A C B, ad quadratum D. Sed quadratum A B, & duo rectangula A C B, faciunt duo quadrata A C, C B. Quare patet propoſitũ.

## PROBL. XV. PROP. XXXIX.

### Datis iiſdem, quæ in ſuperiori Problemate, facere eadem, quæ ibidem, vt totus perimeter orbis, ſit ad ſuperficiem ſphære, in data proportione.

Data proportio ſit, vt ſuprà, quam habet A B, ad H; quàm patebit, ex proceſſu demonſtrationis, de-

bere maiorem esse ea, quam habet quadratum AB, ad quadratum FK. Producatur AB, in C, vt duo quadrata AC, CB, sint ad quadratum FK, vt AB, ad H. Vnusquisque, ex dictis in superiori Problemate, & ex determinatione huius, potest elicere, AB, posse produci. Tunc centro C, interuallis AC, CB, describantur circuli, quorum diametri AE, BD, quibus

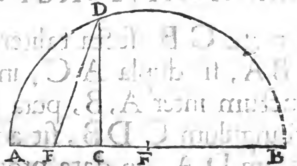



reuolutis circa AE, & intellectis omnibus, vt in superiori Problemate. Aio factum esse propositum. Nam cùm perimeter talis orbis sint duæ superficies sphæricæ, nempè interior, & exterior; superficies verò sphæricæ sint inter se, vt quadrata diametrorum, seù semidiametrorum, vt facilè elicitur ex Archimede primo de sphæra, & Cylindro proposit. 31. erit perimeter orbis, cuius crassities AB, ad superficiem sphæræ, cuius semidiameter FK, vt duo quadrata AC, CB, ad quadratum FK, nempe, vt AB, ad H. Quod erat faciendum.

LEM-

# LEMMA XXV. PROP. XL.

Diameter A B, semicirculi A D B, cuius centrum F, sit diuisa taliter in C, vt BC, sit dupla C A; & erecta à puncto C, perpendiculari CD, ac diuisa A C, bifariam in E, iunctaque E D. Dico E D, esse æqualem F B; & A E, cum E D, esse equalem toti CB.



QVoniam enim B A, est tripla A C, nempe est ad ipsam, vt 6, ad 2; ergo A F, dimidia A B, erit sexquialtera A C, nempe erit ad ipsam, vt 3, ad 2. Ergo FC, est æqualis, tàm C E, quàm E A. Pariter, quoniam BC, est dupla C A; ergo, & quadratum C D, duplum erit quadrati A C, & erit octuplum quadrati

drati C E. Ergo quadratum D E, erit nonuplum quadrati E C. Sed pariter quadratum A F, seu F B, est nonuplum quadrati E C; ergo quadratum E D, erit æquale quadrato F B, & linea lineæ. Et quia pariter A E, est æqualis C F. Ergo A E, cum E D, erit æqualis C B. Quod erat ostendendum.

## SCHOLIVM.

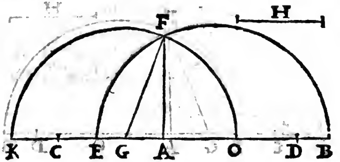
Ex dictis deducitur faciliter, quod si B C, sit maior dupla A C, & fiant reliqua vt suprà; deducitur inquam, duas A E, E D, minores esse C B.

## LEMMA XXVI. PROP. XLI.

Data recta C B, secta taliter in A, vt B A, sit dupla A C, inuenire punctum inter A, B, putà D, vt rectangulum C D B, sit ad quadratum D A, in data proportione.

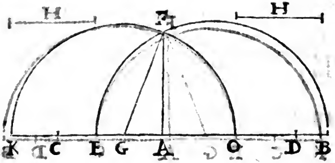
Data proportio sit, quàm habet A B, ad H; & fiat vt dupla A B, cum dupla H, ad H, sic B A, ad A E; quam patet esse minorem dimidia A B, hoc est C A. Facto autem semicirculo super E B, & erecta à pun-

puncto A, perpendiculari A F, ac diuisa E A, bifariam in G, iunctaque G F; centro G, interuallo G F, describatur semicirculus K F O, producta A C, vsque ad K. Quoniam B A, est maior dupla A E, & ducta est perpendicularis A F, & diuisa est E A, bifariam in G, iunctaque est G F; ergo, per Scholium antecedentis Lemmatis, duæ E G, G F, hoc est E O, erit minor A B. Fiat ergo ipsi E O, æqualis A D. Dico punctum D, esse quæsitum; nimirum esse, vt A B, ad H, sic rectangulum C D B, ad quadratum D A.




Quoniam enim duo rectangula K A O, E A B, sunt æqualia inter se, quia sunt æqualia eidem quadrato A F; ergo communi addito rectangulo K A E, duo rectangula K A O, & K A E, nempe rectangulum sub K A, in E O, erit æquale duobus rectangulis E A B, & K A E. Sed rectangulum sub K A, in E O, est æquale quadrato K A, seu E O, quia duæ K A, & E O, sunt æquales; & quia E O, facta est æqualis A D, quadratum E O, est æquale quadrato A D; ergo quadratum A D, erit æquale rectangulo E A B, & rectangulo K A E.

K A E. Sed rectangulum K A E, est æquale rectangulo A E O, quia, vt dictum est, K A, est æqualis E O. Ergo quadratum A D, erit æquale rectangulis E A B, & A E O, nempe rectangulo sub A E, in compositam ex B A, E O, seu in compositam ex B A, A D. Ergo quadratum B A, simul cum rectangulo D A B, hoc est rectangulum sub A B, in compositam ex B A, A D, ad hæc habebit eandem proportionem. Sed rectangulum sub B A, in compositam ex B A, A D, ad hæc habebit eandem proportionem. Sed rectangulum sub B A, in compositam ex B A, A D, ad rectangulum sub E A, in compositam ex B A, A D, est, vt B A, ad A E; & B A, ad A E, facta est, vt dupla A B, cum dupla H, ad H. Ergo, & vt dupla A B, cum dupla H, ad H, sic rectangulum sub A B, in compositam ex B A, A D, ad quadratum A D, nempe sic quadratum A B, cum rectangulo B A D, (quia rectangulum sub A B, in compositam ex B A, A D, diuiditur in quadratum B A, & in rectangulum B A D,) ad quadratum A D. Et di-




uiden-

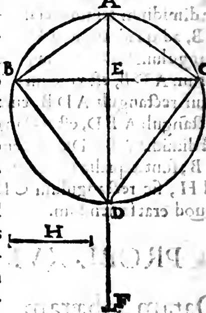
uidendo, vt dupla B A, cum H, ad H, sic quadratum B A, cum rectangulo B D A, ad quadratum D A. Et rursùm diuidendo, vt dupla B A, ad H, sic tria rectangula B D A, cum quadrato D B, ad quadratum A D. Et antecedentium dimidia. Ergo, vt A B, ad H, sic dimidium trium rectangulorum A D B, & quadrati D B, ad quadratum D A. Sed horum dimidium est rectangulum C D B; nam, dimidium duorum rectangulorum A D B, est vnicum rectangulum A D B; & dimidium rectanguli A D B, cum quadrato D B, nempe rectanguli A B D, est rectangulum C A, D B, quia C A, est dimidia A B. Duo autem rectangula A D B, & C A, D B, sunt æqualia rectangulo C D B. Ergo, & vt A B, ad H, sic rectangulum C D B, ad quadratum A D. Quod erat faciendum.


## PROBL. XVI. PROP. XLII.

Datam sphæram, aliquo plano taliter diuidere, vt vna illius portio, ad conum super eamdem basim cum portionibus, cuius vertex sit vertex alterius portionis, sit in data proportione.

SIT data sphæra, cuius diameter A D. Oportet ipsam secare plano B E C, cui diameter sit perpendi-

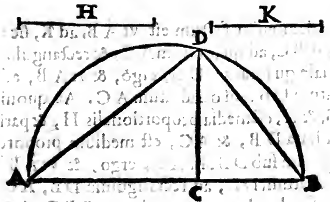
cularis, adeò vt, facto cono, cuius basis sit B E C, & vertex D, portio B A C, sit ad conum B D C, in data proportione. Sit hæc, quam habet A D, ad H, & producta A D, in F, vt A D, sit dupla D F, diuidatur, per propositionem antecedentem A F, in E, vt rectangulum F E A, sit ad quadratum E D, vt A D, ad H; & per punctum E, acto plano B E C, cui A D, sit normalis, & facto cono B D C, vt moris est. Dico factum esse propositum. Intelligatur etiam conus B A C. Portio B A C, ad conum B D C, (de foris sumpto cono B A C,) habet rationem compositam ex ratione portionis ad conum B A C, & coni B A C, ad conum B D C; sed portio B A C, est ad conũ B A C, vt F E, ad D E, vt ostenditur ab Archimede 2. de Sphæra, & Cylindro proposit. 7. & conus B A C, ad conum B D C, est, vt A E, ad E D; ergo proportio portionis B A C, ad conum B D C, componetur quoque ex proportione F E, ad E D, & A E, ad E D. Sed hæ duæ rationes componunt rationem rectanguli F E A, ad quadratum E D. Ergo portio B A C, erit ad conum B D C, vt rectangulum F E A, ad quadratum E D, seù, vt D A, ad H. Quod erat faciendum.




LEM-

# LEMMA XXVII. PROP. XLIII.

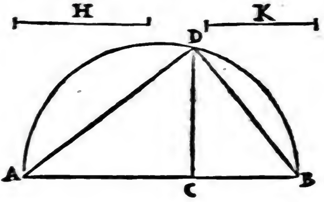
Data hypotenusa trianguli rectanguli, & data ratione, quam habet quadratum vnius lateris, ad rectangulum, sub alio latere in perpendicularem ductam ab angulo recto in hypotenusam, inuenire triangulum.




Data hypotenusa sit A B, & data ratio sit, quam habet A B, ad H. Fiat, vt A B, ad H, sic H, ad K; deinde super A B, fiat semicirculus, & per propos. 20. huius, taliter diuidatur A B, in C, vt rectangulum A B C, sit ad quadratum A C, vt A B, ad K; & à pun-

 cto

cto C, erecto perpendiculo C D, fiat triangulum A D B. Quod affirmo esse quæsitum; nempè esse, vt A B, ad H, sic quadratum D B, ad rectangulum A D C.



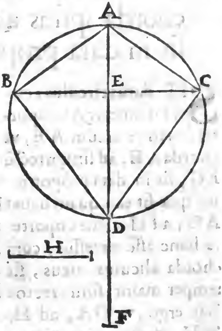

Quoniam enim factum est, vt A B, ad K, sic rectangulum A B C, ad quadratum A C; & rectangulo A B C, est æquale quadratum D B; ergo, & vt A B, ad K, sic quadratum D B, ad quadratum A C. At quoniam inter A B, & K, est media proportionalis H, & pariter inter quadrata D B, & A C, est medium proportionale rectangulum sub D B, in A C; ergo, & vt A B, ad H, sic quadratum D B, ad rectangulum D B, A C. Sed, propter similitudinem triangulorum D B C, A D C, rectangulo D B, A C, est æquale rectangulum A D C. Ergo, & vt A B, ad H, sic quadratum D B, ad rectangulum A D C. Factum est ergo, quod proponebatur.

PRO-

# PROBL. XVII. PROP. XLIV.

## Datis ijsdem, quæ in superiori Problemate, facere eadem, quæ ibidem, vt superficies sphærica portionis B A C, sit ad superficiem conicam coni B D C, in data proportione.

DAta proportio sit pariter, quam habet A D, ad H. Data ergo diametro D A, sphæræ datæ, tamquam hypotenusa trianguli rectanguli, inueniatur triangulum rectangulum A D B, vt quadratum A B, sit ad rectãgulum D B E, vt D A, ad H, & intelligantur, portio B A C, & conus B D C. Dico plano B C, sectam esse sphæram, vt superficies portionis B A C, sit ad superficiem coni B D C, vt A D, ad H. Res est clara, quia ex Archimede sæpe, sæpius citato, vt quadratũ A B, ad rectãgulum D B E, seù, vt D A, ad H, sic superficies portionis, ad superficiem coni.



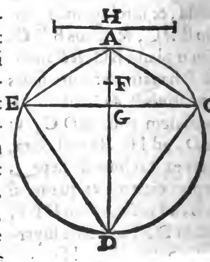

SCHO-

# SCHOLIVM.

ARchimedes libro 2. de sphæra, & Cylindro proposit. 7. soluit hoc Problema. A' data sphæra portionem abscindere, quæ ad conum super eamdem basim, & in eadem altitudine cum ipsa, habeat datam proportionem. Arbitror non esse inutile soluere Problema etiam quoad superficies.

# LEMMA XXVIII PROP. XLV.

## In dato circulo inuenire arcum, vt chorda ipsius ad sinum rectum, sit in data proportione.




SIT datus circulus, cuius diameter AD; oportet inuenire arcum AE, vt chorda AE, ad sinum rectũ EG, sit in data proportione, quæ sit ea, quam habet AD, ad H. Patet oportere hanc esse excessus, cum chorda alicuius arcus, sit semper maior sinu recto. Fiat ergo, vt DA, ad H, sic H, ad aliam, quæ vtique erit minor AD; sit hæc

DG;

D G; & à puncto G, ducantur G E, normalis D A, & chorda E A. Quas assero esse quæsitas. Nam D A, H, & D G, sunt tres continue proportionales. Ergo, vt D A, ad D G, sic quadratum D A, ad quadratum H. Sed pariter, vt D A, ad D G, sic (sumpta G A, communi altitudine,) est rectangulum D A G, nempe quadratum A E, ad rectangulum D G A, nempe ad quadratum E G; ergo, & vt quadratum D A, ad quadratum H, sic quadratum A E, ad quadratum E G. Ergo, & vt D A, ad H, sic A E, ad E G. Quod erat faciendum.

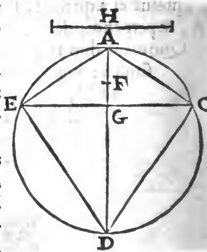
Vel sic. Quoniam H, est minor D A, ex hypothesi, aptetur ei æqualis D E, à puncto D, & ducantur E A, & perpendicularis E G, super diametrum D A. Quoniam duo triangula A D E, A E G, sunt similia; ergo, vt A D, ad D E, seù ad H, ei æqualem, sic A E, ad E G. Quod erat faciendum.

PRO-

## PROBLEMA XVIII. PROP. XLVI.

### A data ſphæra portionẽ abſcindere, cuius ſuperficies ſphærica, ad ſuperficiem conicam coni in eadem baſi, & altitudine cum portione, ſit in data proportione.

DAtæ ſphæræ, & eius circuli maximi ſit diameter D*A*, & data proportio ſit, quam habet D*A*, ad H. Per alteram verò duarum propoſitionum antecedentiũ, aptetur *A*E, & ducatur perpendicularis EG, vt *A*E, ſit ad EG, vt D*A*, ad H; & intelligantur portio, & conus E*A*C. Dico &c. Nam ſuperficies portionis eſt ad ſuperficiem coni, vt quadratum *A*E, ad rectangulum *A*EG, nempe, vt *A*E, ad EG; nempe, vt *A*D, ad H. Quod erat faciendum.

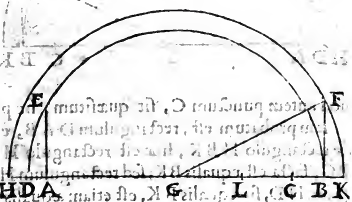



LEM-

# LEMMA XXIX. PROP. XLVII.

## Datam A B, taliter secare in puncto C, vt duo quadrata A B, B C, sint ad rectangulum A B C, cum quadrato B C, in data proportione.

DAta proportio sit, quam habet A B, ad BL, quàm patet debere esse maioris inæqualitatis. Fiat, vt A L, ad L B, sic B A, ad A D, ei positam in di-

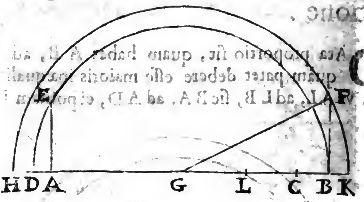



rectum; & super diametro D B, fiat semicirculus, cuius centrum G; & à puncto A, ducatur A E, normalis super A B, & à puncto B, erigatur pariter normalis B F, æqualis ipsi A E, & ducta G F, centro G, interuallo G F, fiat semicirculus, cuius diameter sit H K; & ipsi B K,

N fiat

fiat æqualis B C, (cum B K, sit minor B A, vt ostendetur.) Dico punctum C, esse quæsitum.

In primis, quod B K, sit minor B A, patet; quia, cum duæ A E, B F, sint æquales, erunt æqualia, & illarum quadrata: quare, & rectangula H B K, D A B, erunt æqualia; & ideò erit, vt maior H B, ad minorem D A, sic maior A B, ad minorem B K.




Quòd autem punctum C, sit quæsitum, sic probabitur. Iam probatum est, rectangulum D A B, esse æquale rectangulo H B K, hoc est rectangulo H B C, quia B C, facta est æqualis B K; sed rectangulum H B C, quia (cùm H D, sit æqualis B K, est etiam æqualis B C,) est æquale rectangulo D B C, & quadrato C B; ergo rectangulum D A B, erit æquale rectangulo D B C, & quadrato B C. At rectangulum D A B, est æquale rectangulis D A C, & D A, C B; ergo, & duo rectangula D A C, & D A, C B, erunt æqualia rectangulo D B C, & quadrato B C. Pariter rectangulum D B C,

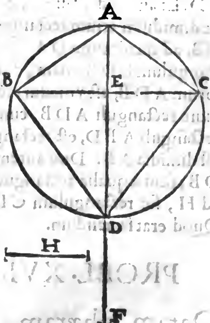
est

est æquale rectangulo sub D A, in B C, & rectangulo A B C; ergo rectangula D A C, & D A, C B, erunt æqualia rectangulo D A, C B, rectangulo A C B, & quadrato B C. Quare communi ablato rectangulo sub D A, in C B, rectangulum D A C, erit æquale rectangulo A B C, & quadrato C B. Ergo ad hæc plana æqualia, rectangulum B A C, habebit eandem proportionem. At rectangulum B A C, ad rectangulum D A C, est vt B A, ad A D, & B A, ad A D, facta est, vt A L, ad L B; ergo, & vt A L, ad L B, sic rectangulum B A C, ad rectangulum A B C, cum quadrato B C. Quare, & componendo, vt A B, ad B L, sic erit rectangulum B A C, cum rectangulo A B C, & cum quadrato B C, ad rectangulum A B C, cum quadrato B C. Sed duo rectangula B A C, & A B C, faciunt quadratum B A. Ergo, & vt A B, ad B L, sic quadrata A B, B C, ad rectangulum A B C, cum quadrato B C.

Quod erat faciendum.

(2)

cularis, adeò vt, facto cono, cuius basis sit B E C, & vertex D, portio B A C, sit ad conum B D C, in data proportione. Sit hæc, quam habet A D, ad H, & producta A D, in F, vt A D, sit dupla D F, diuidatur, per propositionem antecedentem A F, in E, vt rectangulum F E A, sit ad quadratum E D, vt A D, ad H; & per punctum E, acto plano B E C, cui A D, sit normalis, & c, facto cono B D C, vt moris est. Dico factum esse propositum. Intelligatur etiam conus B A C. Portio B A C, ad conum B D C, (de foris sumpto cono B A C,) habet rationem compositam ex ratione portionis ad conum B A C, & coni B A C,

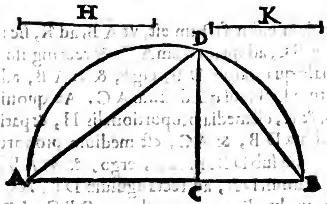



ad conum B D C; sed portio B A C, est ad conũ B A C, vt F E, ad D E, vt ostenditur ab Archimede 2. de Sphæra, & Cylindro proposit. 7. & conus B A C, ad conum B D C, est, vt A E, ad E D; ergo proportio portionis B A C, ad conum B D C, componetur quoque ex proportione F E, ad E D, & A E, ad E D. Sed hæ duæ rationes componunt rationem rectanguli F E A, ad quadratum E D. Ergo portio B A C, erit ad conum B D C, vt rectangulum F E A, ad quadratum E D, seu, vt D A, ad H. Quod erat faciendum.

LEM-

# LEMMA XXVII. PROP. XLIII.

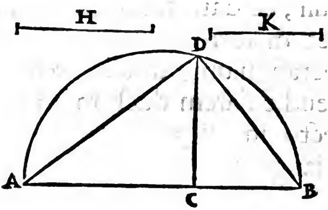
Data hypotenuſa trianguli rectanguli, & data ratione, quam habet quadratum vnius lateris, ad rectangulum, ſub alio latere in perpendicularem ductam ab angulo recto in hypotenuſam, inuenire triangulum.




Data hypotenuſa ſit A B, & data ratio ſit, quam habet A B, ad H. Fiat, vt A B, ad H, ſic H, ad K; deinde ſuper A B, fiat ſemicirculus, & per propoſ. 20. huius, taliter diuidatur A B, in C, vt rectangulum A B C, ſit ad quadratum A C, vt A B, ad K; & à pun-

M 2 cto

cto C, erecto perpendiculo C D, fiat triangulum A D B. Quod affirmo esse quæsitum; nempè esse, vt A B, ad H, sic quadratum D B, ad rectangulum A D C.



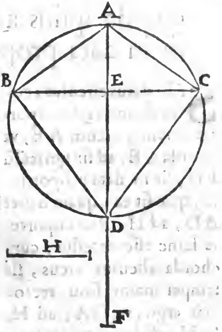

Quoniam enim factum est, vt A B, ad K, sic rectangulum A B C, ad quadratum A C; & rectangulo A B C, est æquale quadratum D B; ergo, & vt A B, ad K, sic quadratum D B, ad quadratum A C. At quoniam inter A B, & K, est media proportionalis H, & pariter inter quadrata D B, & A C, est medium proportionale rectangulum sub D B, in A C; ergo, & vt A B, ad H, sic quadratum D B, ad rectangulum D B, A C. Sed, propter similitudinem triangulorum D B C, A D C, rectangulo D B, A C, est æquale rectangulum A D C. Ergo, & vt A B, ad H, sic quadratum D B, ad rectangulum A D C. Factum est ergo, quod proponebatur.

PRO-

# PROBL. XVII. PROP. XLIV.

**Datis ijſdem, quæ in ſuperiori Problemate, facere eadem, quæ ibidem, vt ſuperficies ſphærica portionis B A C, ſit ad ſuperficiem conicam coni B D C, in data proportione.**

DAta proportio ſit pariter, quam habet A D, ad H. Data ergo diametro D *A*, ſphæræ datæ, tamquam hypotenuſa trianguli rectanguli, inueniatur triangulum rectangulum *A* D B, vt quadratum *A* B, ſit ad rectāgulum D B E, vt D *A*, ad H, & intelligantur, portio B *A* C, & conus B D C. Dico plano B C, ſectam eſſe ſphæram, vt ſuperficies portionis B *A* C, ſit ad ſuperficiem coni B D C, vt A D, ad H. Res eſt clara, quia ex Archimede ſæpe, & ſæpius citato, vt quadratū A B, ad rectāgulum D B E, ſeù, vt D *A*, ad H, ſic ſuperficies portionis, ad ſuperficiem coni.



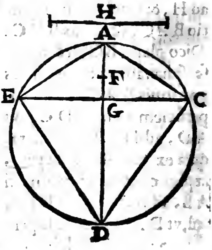

SCHO-

# SCHOLIVM.

Archimedes libro 2. de sphæra, & Cylindro proposit. 7. soluit hoc Problema. A data sphæra portionem abscindere, quæ ad conum super eamdem basim, & in eadem altitudine cum ipsa, habeat datam proportionem. Arbitror non esse inutile soluere Problema etiam quoad superficies.

## LEMMA XXVIII. PROP. XLV.

In dato circulo inuenire arcum, vt chorda ipsius ad sinum rectum, sit in data proportione.




SIT datus circulus, cuius diameter AD; oportet inuenire arcum AE, vt chorda AE, ad sinum rectū EG, sit in data proportione, quæ sit ea, quam habet AD, ad H. Patet oportere hanc esse excessus; cum chorda alicuius arcus, sit semper maior sinu recto. Fiat ergo, vt DA, ad H, sic H, ad aliam, quæ vtique erit minor AD; sit hæc

DG;

D G; & à puncto G, ducantur G E, normalis D A, & chorda E A. Quas assero esse quæsitas. Nam D A, H, & D G, sunt tres continue proportionales. Ergo, vt D A, ad D G, sic quadratum D A, ad quadratum H. Sed pariter, vt D A, ad D G, sic (sumpta G A, communi altitudine,) est rectangulum D A G, nempe quadratum A E, ad rectangulum D G A, nempe ad quadratum E G; ergo, & vt quadratum D A, ad quadratum H, sic quadratum A E, ad quadratum E G. Ergo, & vt D A, ad H, sic A E, ad E G. Quod erat faciendum.

Vel sic. Quoniam H, est minor D A, ex hypothesi, aptetur ei æqualis D E, à puncto D, & ducantur E A, & perpendicularis E G, super diametrum D A.

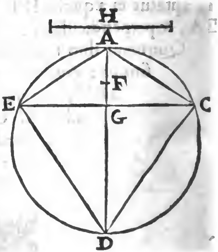
Quoniam duo triangula A D E, A E G, sunt similia; ergo, vt A D, ad D E, seù ad H, ei æqualem, sic A E, ad E G. Quod erat faciendum.

PRO-

# PROBLEMA XVIII. PROP. XLVI.

A data ſphæra portionē abſcindere, cuius ſuperficies ſphærica, ad ſuperficiem conicam coni in eadem baſi, & altitudine cum portione, ſit in data proportione.

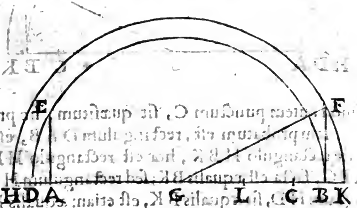
DAtæ ſphæræ, & eius circuli maximi ſit diameter D*A*, & data proportio ſit, quam habet D*A*, ad H. Per alteram verò duarum propoſitionum antecedentiũ, aptetur *A*E, & ducatur perpendicularis EG, vt *A*E, ſit ad EG, vt D*A*, ad H; & intelligantur portio, & conus E*A*C. Dico &c. Nam ſuperficies portionis eſt ad ſuperficiem coni, vt quadratum *A*E, ad rectangulum *A*EG, nempe, vt *A*E, ad EG; nempe, vt *A*D, ad H. Quod erat faciendum.



# LEMMA XXIX. PROP. XLVII.

## Datam A B, taliter secare in puncto C, vt duo quadrata A B, B C, sint ad rectangulum A B C, cum quadrato B C, in data proportione.

DAta proportio sit, quam habet A B, ad BL, quàm patet debere esse maioris inæqualitatis. Fiat, vt A L, ad L B, sic B A, ad A D, ei positam in di-

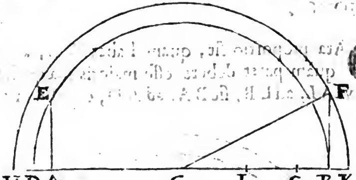



rectum; & super diametro D B, fiat semicirculus, cuius centrum G; & à puncto A, ducatur A E, normalis super A B, & à puncto B, erigatur pariter normalis B F, æqualis ipsi A E, & ducta G F, centro G, interuallo G F, fiat semicirculus, cuius diameter sit H K; & ipsi B K,

N fiat

fiat æqualis BC, (cum BK, ſit minor BA, vt oſtendetur.) Dico punctum C, eſſe quæſitum.

In primis, quod BK, ſit minor BA, patet; quia, cum duæ AE, BF, ſint æquales, erunt æqualia, & illarum quadrata: quare, & rectangula HBK, DAB, erunt æqualia; & ideò erit, vt maior HB, ad minorem DA, ſic maior AB, ad minorem BK.




Quòd autem punctum C, ſit quæſitum, ſic probabitur. Iam probatum eſt, rectangulum DAB, eſſe æquale rectangulo HBK, hoc eſt rectangulo HBC, quia BC, facta eſt æqualis BK; ſed rectangulum HBC, quia (cùm HD, ſit æqualis BK, eſt etiam æqualis BC,) eſt æquale rectangulo DBC, & quadrato CB; ergo rectangulum DAB, erit æquale rectangulo DBC, & quadrato BC. At rectangulum DAB, eſt æquale rectangulis DAC, & DA, CB; ergo, & duo rectangula DAC, & DA, CB, erunt æqualia rectangulo DBC, & quadrato BC. Pariter rectangulum DBC, eſt

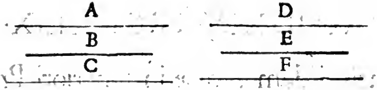
est æquale rectangulo sub D A, in B C, & rectangulo A B C; ergo rectangula D A C, & D A, C B, erunt æqualia rectangulo D A, C B, rectangulo A C B, & quadrato B C. Quare communi ablato rectangulo sub D A, in C B; rectangulum D A C, erit æquale rectangulo A B C, & quadrato C B. Ergo ad hæc plana æqualia, rectangulum B A C, habebit eandem proportionem. At rectangulum B A C, ad rectangulum D A C, est vt B A, ad A D, & B A, ad A D, facta est, vt A L, ad L B; ergo, & vt A L, ad L B, sic rectangulum B A C, ad rectangulum A B C, cum quadrato B C. Quare, & componendo, vt A B, ad B L, sic erit rectangulum B A C, cum rectangulo A B C, & cum quadrato B C, ad rectangulum A B C, cum quadrato B C. Sed duo rectangula B A C, & A B C, faciunt quadratum B A. Ergo, & vt A B, ad B L, sic quadrata A B, B C, ad rectangulum A B C, cum quadrato B C. Quod erat faciendum.

(:)

# LEMMA XXX. PROP. XLVIII.

Si ſint quotcumque magnitudines, & aliæ ipſis numero æquales, quæ binæ ſumantur, & in eadem proportione. Quàm proportionem habebit factum quodcumque ſub quibuslibet magnitudinibus primæ ſeriei, ad factum ſub alijs magnitudinibus eiuſdem ſeriei, ſic factum ſub magnitudinibus ſecundæ ſeriei antecedentibus homologis, ad factum ſub magnitudinibus ſecundæ ſeriei homologis conſequentibus, exiſtentibus omnibus factis homogeneis.

REM exemplifico. Sint duæ ſeries; in prima ſint quotcumque magnitudines A,B,C,& in ſecũda aliæ iſtis numero æquales D,E,F, quæ binæ ſumantur, & in eadem proportione, nempe ſit, vt A, ad B, ſic D, ad E; & vt B, ad C, ſic E, ad F. Intelligo ergo, quod v. g. quadratum A, cum rectangulo A, B, ſit ad quadratum




dratum C, vt quadratum D, cum rectangulo D, E, ad quadratum F; & ſic in altioribus poteſtatibus, & in factis diuerſimode. Res eſt facilis probatu; quia proportio primi facti ad ſecundum factum, componitur ex iiſdem proportionibus, ex quibus componitur proportio tertij facti ad quartum factum.

## SCHOLIVM.

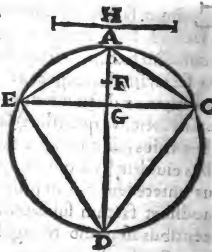
EX dictis infertur, quod etiam permutando, vt primum factum in prima ſerie, ad primum factum in ſecunda ſerie, ſic ſecundum factum in prima ſerie, ad ſecundum factum in ſecunda ſerie, dummodo hæc omnia facta, ſint homogenea.

Pariter ex dictis infertur, quod ſi ſint duo triangula ſimilia, erit, vt quodlibet factum ſub quibuslibet lateribus vnius, ad quodlibet factum ſub quibuslibet lateribus eiuſdem, ita quodlibet factum ſub lateribus alterius antecedentibus in primo triangulo homologis, ad quodlibet factum ſub lateribus alterius, itidem conſequentibus in primo triangulo homologis; dummodo hæc facta, ſint homogenea. Res eſt euidens, quia latera duorum triangulorum ſimilium, ſunt duæ ſeries trium magnitudinum diſpoſitæ ſecundum conditionem Lemmatis.

# PROBL. XIX. PROP. XLIX.

Datis iisdem, quæ in superiori Problemate, facere eadem, quæ ibidem, vt totus perimeter portionis, sit ad totum perimetrum coni, in data proportione.

Datæ sphæræ sit circulus maximus, cuius diameter AD, & data ratio sit, quam habet AD, ad H, quæ debet esse excessus. Diuidatur AD, in F, vt quadratum AD, cum quadrato DF, sit ad rectangulum ADF, cum quadrato DF, in data ratione AD, ad H, per propositionem 47. Deinde à puncto D, aptetur DE, æqualis DF, & dimissa perpendiculari EGC, & iuncta EA, facta consueta reuolutione, intelligantur portio, & conus EAC. Dico hæc solida esse quæsita. Cùm enim factum sit, vt DA, ad H, sic duo quadrata AD, DF, ad rectangulum ADF, cum quadrato




DF,

DF, nempe, (propter æqualitatem DF, DE,) duo quadrata AD, DE, ad rectangulum ADE, cum quadrato DE; & cùm (propter similitudinem triangulorum AED, AEG) sit, vt duo quadrata AD, DE, ad rectangulum ADE, cum quadrato DE, sic duo quadrata AE, EG, ad rectangulum AEG, cum quadrato EG, per Propos. anteced., nempe, ex Archimede sæpe citato, perimeter portionis EAC, ad perimetrum coni EAC. Ergo, & vt AD, ad H, sic perimeter portionis, ad perimetrum coni. Factum est ergo, quod proponebatur.

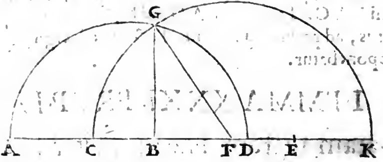
## LEMMA XXXI. PROP. L.

Datam rectam lineam taliter secare in puncto, vt quadratum totius, ad rectangulum sub tota, & sub vno segmento, cum quadrato eiusdem segmenti, sit in data proportione.

Data recta linea sit AB, & data proportio sit, quam habet AB, ad BD, ei positam in directum. Patet proportionem datam debere esse talis conditionis, vt AB, sit maior subdupla BD, quia semper quadratum AB, est maius subduplo rectanguli ABC, & quadrati BC. Fiat BE, æqualis AB, quæ secetur bifa-

bifariam in F; deinde ſuper A D, fiat ſemicirculus, & à puncto B, erigatur perpendicularis B G, & à puncto F, ducatur linea ad punctum G; centro autem F, interuallo F G, deſcribatur ſemicirculus C G K, qui ſemper ſecabit A B, vt patebit inferius. Dico punctum C, eſſe quæſitum.

Quoniam enim rectangulum A B D, & rectangulum




K B C, ſunt æqualia inter ſe, quia æqualia eidem quadrato G B; & quia K E, eſt æqualis C B, rectangulum K B C, eſt æquale rectangulo E C B; ergo rectangulum A B D, eſt æquale rectangulo E C B, nempe rectangulo E B C, & quadrato C B. Sed quoniam E B, eſt æqualis A B, ergo rectangulum E B C, eſt æquale rectangulo A B C. Quare, & rectangulum A B D, erit æquale rectangulo A B C, & quadrato B C. Quare quadratum A B, ad hæc habebit eadem proportionem. Sed quadratum A B, ad rectangulum A B D, eſt vt A B, ad B D. Ergo, & vt A B, ad B D, ſic quadratum A B, ad rectangulum A B C, cum quadrato B C. Quod erat faciendum.

Quod

Quòd verò assumptum est, nempe semicirculum CGK, secare A B; seu F G, minorem esse F A, patet; quia, cùm D B, sit minor dupla B A, ergo, & quadratum G B, erit minus duplo quadrati A B. Ergo quadratum G B, ad quadratum A B, erit in ratione minori, quam 8, ad 4. Et quia B F, cum sit dimidia B A, est eius quadratum subquadruplum quadrati A B. Ergo duo quadrata G B, B F, nempe quadratum G F, erit ad quadratum A B, in ratione minori, quam 9, ad 4. Sed quadratum A F, est ad quadratum A B, vt 9. ad 4. Ergo quadratum F G, est minus quadrato F A; & consequenter F G, erit minor F A.

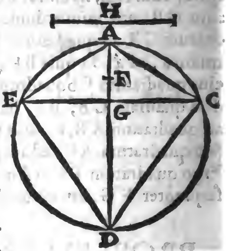
## PROBLEMA XX. PROP. LI.

Datis iisdem, quæ in superiori Problemate, facere eadem, quæ ibidem, vt superficies sphærica portionis E A C, sit ad perimetrum coni, in data proportione.

Pariter data ratio sit, quam habet A D, ad H, quam infra patebit, debere esse maiorem subdupla. Diuidatur, per Lemma antecedens, A D, in F, vt quadratum A D, sit ad rectangulum A D F, cum quadrato D F, vt A D, ad H. Et pariter, vt supra factum est, aptetur à puncto D, D E, æqualis D F, & fiant omnia,

O vt

vt in antecedenti Problemate, & arguatur congruenti argumentatione, vt ibidem.




Tandem cócludemus, quadratum A E, ad rectangulũ A E G, cum quadrato E G, esse, vt A D, ad H. Quare patet etiam, superficiem sphæricam portionis E A C, esse ad perimetrum coni E A C, vt A D, ad H.

Quòd verò ratio A D, ad H, debeat esse subdupla. Patet, quia quadratum A E, est maius subduplo rectanguli A E G, cum quadrato E G.

# SCHOLIVM.

EX dictis habemus modum, quo soluamus Problema, in gratiam cuius traditum est præsens; nempe. Datis ijsdem, quæ in tribus superioribus Problematibus, facere eadem, quæ ibidem, vt totus perimeter portionis E A C, intus, & extra, dempto cono E A C, ad perimetrum coni E A C, sit in data proportione. Nam perimeter talis portionis extra, constaret superficie sphærica portionis, & circulo basis; intra verò, superficie conica, supponendo ablato cono, remanere basim. Si ergo fiat, vt excessus A D, super H, ad H, (quia in tali casu proportio data debet esse excessus) sic quadra-

dra-

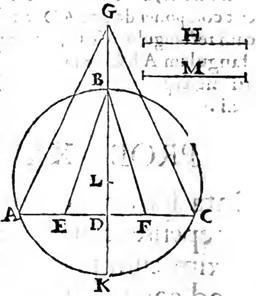
dratum E A, ad rectangulum A E G, cum quadrato E G; erit componendo, vt A D, ad H, sic quadratum A E, cum rectangulo A E G, & cum quadrato E G, ad rectangulum A E G, cum quadrato E G; nempe, totus perimeter portionis, vt suprà expositæ, ad perimetrum coni.

## PROBL. XXI. PROP. LII.

### Data sphæræ portione quacumque, reperire conum circa eamdem axim cum portione, vt portio sit ad conum in data proportione.

Licet solutio huius Problematis possit haberi facilissimè ex Archimede, vt patebit; quia tamen possumus ipsum soluere, quamuis difficiliori modo, per quandam propriam propositionem vniuersalem, quam censemus non spernendam; ideò cùm nesciamus hanc aptiori loco collocare; in gratiam nostræ propositionis, soluimus hoc Problema, primò facilissimè ex Archimede postea præmisso proprio Lemmate vniuersali.

Sit ergo datæ sphæræ, cuius diameter B K, centrum L, data portio A B C, cuius axis B D, & data sit proportio, quam habet K B, ad H, & oporteat facere, quod imperatum est. Fiat, vt K D, ad eandem K D,




eum KL, sic D B, ad DG. Ergo, ex Archimede 2. de sphæra, & Cylindro propos. 2. si fiat conus A G C, hic erit æqualis portioni A B C. Fiat ergo, & fiat, vt G D, ad D B, sic K B, ad M; & fiat, vt M, ad H, sic quadratum A D, ad quadratum D E. Facto ergo cono E B F. Dico hunc esse quæsitum.

Nam conus A G C, ad conum E B F, habet rationem compositam ex ratione G D, ad D B, & ex ratione quadrati A D, ad quadratum D E, per propositionem primam huius. Sed, vt G D, ad D B, sic facta est K B, ad M; & vt quadratum A D, ad quadratum, D E, sic M, ad H. Ergo conus A G C, seu portio A B C, ei æqualis, ad conum E B F, habet rationem compositam ex ratione K B, ad M, & M, ad H. Sed istæ duæ rationes K B, ad M, & M, ad H, faciunt rationem K B, ad H. Ergo, &c. Quod &c.

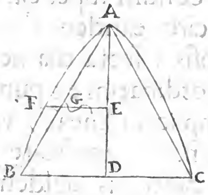
LEM-

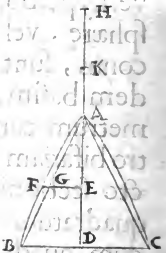
# LEMMA XXXII. PROP. LIII.

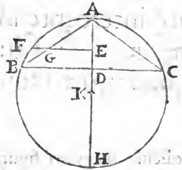
Quodlibet Conoides parabolicum, vel hyperbolicum; quælibet portio sphæræ, vel sphæroidis, & etiam conus, sunt ad conum super eandem basim, & circa eandem diametrum cum ipsis (secta diametro bifariam, & ordinatim ex puncto sectionis applicata linea,) vt quadratum ordinatim applicatæ, cum quadrato portionis eiusdem ordinatim applicatæ interceptæ inter punctum diuisionis, & latus coni, ad duplum quadratum huius interceptæ.

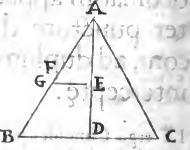
SIT ergo Conoides parabolicum in prima figura, vel hyperbolicum, vt in secunda, vel quælibet portio sphæræ, vel sphæroidis, vt in tertia, vel conus, vt in quarta A B C, cuius diametrum A D, & circa diametrum A D, & super eandem basim B C, sit, in vnaquaque figura, conus B A C, & diameter D A, sit diuisa,

uiſa bifariam in E, & per E, ſit ducta E F, parallela B D, ſecans A B, latus coni in G. Dico ſolidum B A C, eſſe ad conum B A C, vt duo quadrata F E, E G, ad duo quadrata G, E.










In cono res eſt euidens, quia eſt proportio æqualitatis. In portione ſphæræ, vel ſphæroidis, ſit diameter totius ſphæræ, vel ſphæroidis A H. In conoide hyperbolico, A H, ſit diameter tranſuerſa, & in omnibus iſtis ſit centrum K.

Tunc in Conoide parabolico. Quoniã ex prim. conic. prop. 20. quadratum B D, est duplum quadrati F E, cum sit ad ipsum, vt D A, ad A E, & est quadruplum quadrati G E; ergo quadratum F E, erit duplum quadrati G E; & duo quadrata F E, E G, erunt sexquialtera duorum quadratorum G E; nempe, vt Conoides B A C, est coni B A C, ex Archimede lib. de Conoid. & Sphæroid. prop. 23.

In Conoide verò hyperbolico, & in portione sphæræ, vel sphæroidis. Quoniam quadratum F E, est ad quadratum B D, ex primo conic. prop. 21. vt rectangulum H E A, ad rectangulum H D A; & vt quadratum B D, ad quadratum G E, sic rectangulum H D A, ad rectangulum sub H D, in dimidiam ipsius A E, nempe ad rectangulum sub dimidia H D, in A E. Ergo ex æquali, vt quadratum F E, ad quadratum G E, sic rectangulum H E A, ad rectangulum sub dimidia H D, in E A, nempe (propter eandem altitudinem A E,) vt H E, ad dimidiam H D, quæ est K E, vt consideranti patet. Ergo, & componendo, vt quadratum F E, cum quadrato E G, ad quadratum E G. sic H E, cum E K, ad E K. Et ad consequentium dupla. Ergo, vt quadratum F E, cum quadrato E G, ad duo quadrata E G, sic H E, cum K E, ad H D. Sed E H, cum K E, facit dimidiam A H, cum H D, vt consideranti patet; & ex Archimede de Conoid. & sphæroid. prop. 31. & 33. Portio B A C, vel conoides hyperbolicum, est ad conum B A C, vt dimidia H A, cum H D, ad H D. Ergo portio, vel conoides, est ad conum, vt duo quadrata E G. Quod &c.

In

In Conoide enim hyperbolico, patet, quod dimidia H A, cum H D, facit ſexquialteram H A, cum A D.

# PROBL. XXII. PROP. LIV.

## Idem.

Diuidatur B D, bifariam in N, & ducatur per punctum N, N O P, parallela A D, ſecans B A, latus coni in O; & fiat, vt duo quadrata P N, cum duobus quadratis N O, ad quadratum A D, ſic K B, ad M; deinde fiat, vt M, ad H, ſic quadratum A D, ad quadratum D E, vbicunque cadat punctum E; & fiat conus E B F. Dico portionem A B C, eſſe ad conum E B F, vt K B, ad H.


Quoniam enim ratio portionis A B C, ad conū E B F, de foris ſumpto cono A B C, componitur ex ratione portionis ad conum A B C, & coni A B C, ad conum E B F; & vt portio ad conum A B C, ſic, per propoſitionem antecedentem, duo quadrata P N, & N O, ad duo quadrata N O; & vt conus A B C, ad conum E B F, ſic quadratum A D, ad quadratum D E.

Ergo

Ergo proportio portionis A B C, ad conum E B F, componetur quoque ex proportione quadratorũ P N, N O, ad duo quadrata N O, & ex proportione quadrati A D, ad quadratum D E. Sed proportio quadratorum P N, N O, ad duo quadrata N O, est eadem cum proportione duorum quadratorum P N, cum duobus quadratis N O, ad quatuor quadrata N O, quia, vt dimidium, ad dimidium, sic duplum ad duplum. Ergo proportio portionis ad conum E B F, componetur quoque, ex proportione duorum quadratorum P N, cum duobus quadratis N O, ad quatuor quadrata N O, seù ad quadratum A D, eis æquale, & ex ratione quadrati A D, ad quadratum D E. Sed vt duo quadrata P N, cum duobus quadratis N O, ad quadratum A D, sic facta est B K, ad M; & vt quadratum A D, ad quadratum E D, sic M, ad H. Ergo proportio portionis A B C, ad conum E D F, cõponetur ex proportionibus K B, ad M, & M, ad H. Sed ex ijsdem proportionibus componitur ratio K B, ad H. Ergo, vt K B, ad H. Sic portio A B C, ad conum E B F. Quod erat faciendum.

## SCHOLIVM.

CVM hæc huius Libelli imprimerentur, occasione, qua Proposit. 53. vsi sumus Archimede libro de Conoid. & Sphæroid. prop. 23. in qua demonstrat. Conoides parabolicum ad conum in eadem basi, & circa eandem diametrum cum ipso, esse in proportione sexquialtera, incidimus in modum hoc idem demonstrãdi,

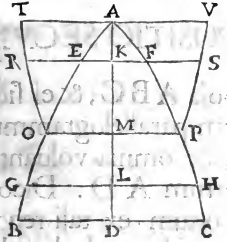
Sed per auream methodum indiuisibilium, quam qui aspernantur, aliam non merentur pœnam, quàm priuari fructu ex tali methodo colligendo. Visum est ergo peroptimum, huncmodum hoc loco explicare, qui vtique est diuersus ab his, quibus vtuntur columnæ herculeæ Geometrarum Italorum nostri sæculi, nimirum Bonauentura Cauálerius lib. 4. Geometriæ indiuisibilium, prop. 21. & Euangelista Torricellius in exemplis pro indiuisibilibus curuis, exemplo 14. Ne ergo nostrum ordinem incæptum variemus, trademus hunc modum per duas sequentes propositiones extra ordinem sumptas.

## PROPOSITIO PRIMA.

Esto parabola B A C, cuius diameter D A, basis B D C, & in diametro D A, sint sumpta duo puncta K, & L, æque remota à punctis A, & D, per quæ sint ductę ordinatim applicatæ E K; G L. Dico duo quadrata E K, G L, esse æqualia quadrato B D.

QVoniam enim quadratum E K, est ad quadratum B D, vt K A, ad A D; & pariter quadratum

tum G L, est ad quadratum B D, vt L A, ad A D, ex 20. prim. Conic. Ergo, & duo quadrata E K, G L,




erunt ad quadratum B D, vt K A, seù L D, simul cum A L, nempe, vt tota A D, ad A D. Quare æqualia [illegible]

# SCHOLIVM.

Facilè elicitur ex dictis, quod si A D, diuisa bifariam in M, & , per M, ordinatim applicata O M P, mente concipiamus, frustrũm B O P C, parabolæ, rotari super O P, veluti super cardinem, donec collocetur super O A P, adeò vt B D C, sit in T A V, & , D M, congruat A M, & punctum D, congruat ipsi A; puncta verò B, C, congruant ipsis punctis T, V; infertur inquam, quod si in A M, sumatur quodlibet

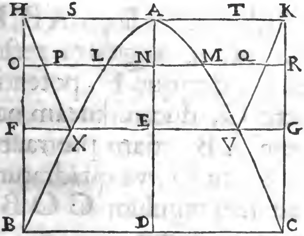
punctum K, per quod ordinatim applicetur R E K F S; semper duo quadrata R K, K E, erunt æqualia quadrato N M. Res est euidens.

# PROPOSITIO SECVNDA.

Sit parabola A B C, & ei sit circumscriptum parallelogrammum H B C K, & omnia voluantur circa diametrum A D. Dico Cylindrum ortum ex tali reuolutione, esse conoidis parabolici duplum.

SEcetur A D, bifariam in E, & per punctum E, agatur planum F X E V G, parallelum planis H K, B C, & mente concipiamus frustum parabolicum B X V C, locari, adeò vt basis B D C, sit in H A K, punctum D, sit in puncto A, & linea D E, sit super E A, & sumatur in A E, quodlibet punctum N, per quod agatur planum O P L N M Q R, faciens in Cylindro circulum, cuius radius O N, in portione conoidis X A V, circulum, cuius radius L N, & in frusto X H K V, circulum, cuius radius P N. Quoniam enim quadratum H A, seù O N, est æquale quadratis P N, & N L, ex Scholio Propositionis antecedentis. Ergo, & circulus, cuius radius O N, erit æqualis circulis, quorum radij

radij P N, N L; & punctum L, sumptum est vtcumque. Ergo omnes circuli Cylindri H F G K, sumpti iuxta




regulam planũ H A K, seù F E G, erunt æquales omnibus circulis frusti HXVK, & portionis X A V, sũptis iuxta eandem regulam. Quare & Cylinder H F G K, erit æqualis frusto HXVK, seù B X V C, & portioni X A V, nempe erit æqualis toti conoidi B A C. Sed Cylinder H B C K, est duplus Cylindri H F G K. Ergo talis Cylinder est duplus conoidis B A C. Quod erat ostendendum.

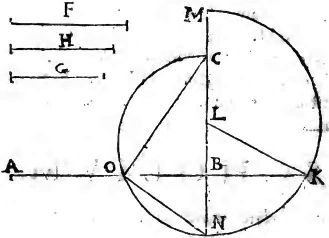
# SCHOLIVM.

Ex dictis clarè infertur propositum, nempe Conoides esse sexquialterum coni super base B D C, & circa diametrum A D. Ratio est, quia conus est subtriplus Cylindri, vnde, quorum Cylindrus est sex, & conoides tria, conus erit duo.

LEM-

# LEMMA XXXIII. PROP. LV.

Datis duabus rectis lineis AB, BC, continentibus angulum rectum, ABC, dataque F, potentia, à puncto C, ducere lineam occurrentem AB, etiam protractæ, si opus sit, in O, vt quadratum F, sit ad rectangulum COB, in data proportione.




SIT hæc, quàm habet F, ad G; & inter F, & G, sit media proportionalis H; & fiat, vt BC, ad H, sic H, ad BK, positam in directum ipsi AB; sectaque BC,

BC, bifariam in L, & ducta LK; centro L, interuallo LK, fiat semicirculus, cuius diameter sit MN; & super CN, ex parte opposita, fiat semicirculus NOC, secans AB, in O. Dico punctum O, esse quæsitum, nempe ducta CO, esse quadratum F, ad rectangulum COB, vt F, ad G. Ducatur ON. Quoniam LC, est æqualis LB, & ML, ipsi LN; ergo & MC, est æqualis BN. Ergo quadratum BK, est æquale rectangulo CNB, nempe quadrato NO. Ergo, & linea BK, est æqualis NO. Cùm autem (propter similitudinem triangulorum COB, NOB) rectangulum COB, sit æquale rectangulo sub CB, in ON, seù in BK; & rectangulum CBK, sit æquale quadrato H. Ergo & rectangulum COB, erit æquale quadrato H. Sed quadratum F, ad quadratum H, est, vt F, ad G. Ergo, & vt F, ad G, sic quadratum F, ad rectangulum COB. Quod erat faciendum.

# SCHOLIVM.

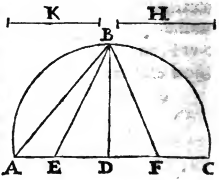
LEmma antecedens reducitur ad Problema Vieteum. Data base trianguli rectanguli, & media proportionali inter hypotenusam, & perpendiculum, inuenire triangulum.

PRO-

# PROBL. XXIII. PROP. LVI.

Datis iiſdem, quæ in ſuperiori Problemate, facere eadem, quæ ibidem, vt ſuperficies portionis, ſit ad ſuperficiem coni, in data proportione.

DAta proportio ſit, quàm habet D B, ad H, & ducta B A, oporteat facere, quòd imperatum eſt. Datis ergo duabus AD, D B, continentibus angulum rectum A D B, ducatur à puncto B, per propoſitionem antecedentem, B E, vt quadratum datæ B A, ſit ad rectangulum B E D, vt B D, ad H; & fiat ex triangulo B E D, conus E B F. Quem dico eſſe quæſitum. Demonſtratio ex Archimede eſt faciliſſima, quapropter ad alia tranſeamus.




LEM-

# LEMMA XXXIV. PROP. LVII.

## Datam rectam A B, ſectam vtcumque in C, rursùm diuidere in D, inter C, B; vt rectangulum A D C, ſit ad quadratum D B, in data proportione.

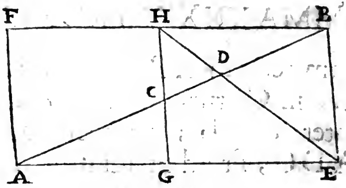
HOC Lemma triplicem habet caſum, ſecundùm quod proportio data eſt, vel æqualitatis, vel exceſſus, vel defectus. Si ſit æqualitatis, ſoluetur ſic.


Diuidatur B C, in D, vt ſit, ſicut A B, ad B C, ſic B D, ad D C. Nam cùm ſit, vt A B, ad B C, ſic B D, ad D C; ergo permutando, erit, vt A B, ad B D, ſic B C, ad C D. Ergo, & diuidendo, erit, vt A D, ad D B, ſic D B, ad D C. Quare rectangulum A D C, erit æquale quadrato D B.

VEL ſic. Fiat A B, diameter cuiuſcumque parallelogrammi F E, & per punctum C, agatur H C G, paralella F A, vel B E, & iungatur H E, ſecans B A, in D. Dico punctum D, eſſe quæſitum.

Quoniam enim triangulum A D E, eſt ſimile trian-

Q gulo.

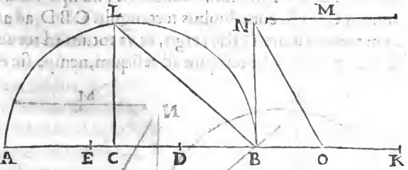



gulo HDB, & pariter triangulum EDB, est simile triangulo HDC. Ergo, vt AD, ad DB, sic ED, ad DH. Vt autem ED, ad DH, sic BD, ad DC: ergo & vt AD, ad DB, sic DB, ad DC. Quare rectangulum ADC, erit æquale quadrato DB.

SI autem proportio data sit excessus, sit ea, quam habet AC, ad CE, & fiat, vt AE, ad EC, ita composita ex AB, & OB, ad BK, positam in directum ipsi AB; deinde facto semicirculo super AB, & à puncto C, erecta perpendiculari CL, & iuncta LB, fiat, vt AE, ad EC, sic LB, ad M, & inter LB, & M, inueniatur media proportionalis, cui sit æqualis BN, erecta perpendiculariter super AB, à puncto B; sectaque BK, bifariam in O, & iuncta ON, fiat OD, ipsi ON, æqualis (infra enim patebit, punctum D, cadere inter C, B.) Dico punctum D, esse quæsitum.

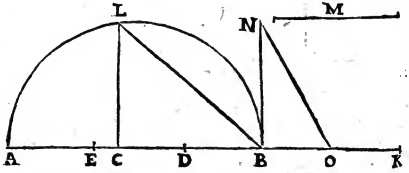
Quoniam enim duo quadrata NB, BO, sunt æqualia quadrato NO, nempe quadrato OD (quia OD, facta est æqualis NO;) & quadratum DO, est æquale duobus quadratis DB, BO, & duobus rectangulis DBO,

DBO, nempe vnico rectangulo DBK, ) quia KB, dupla est BO.) Ergo duo quadrata NB, BO, erunt æqualia duobus quadratis DB, BO, & rectangulo DBK. Et communi ablato quadrato BO; quadratum NB, nempe rectangulum sub LB, & M, (quia NB,




est media proportionalis inter LB, & M, ) erit æquale quadrato DB, & rectangulo DBK. Ergo, quoniam factum est suprà, vt AE, ad EC, sic LB, ad M; & est, vt LB, ad M, sic quadratum LB, ad rectangulum sub LB, in M, & quadrato LB, est æquale rectangulum ABC; & pariter rectangulo sub LB, & M, probatum est æquale quadratũ DB, cum rectangulo DBK; ergo erit etiam, vt AE, ad EC, sic rectangulum ABC, ad quadratum DB, cum rectangulo DBK. Sed quoniam supra factum est, vt AE, ad EC, sic composita ex AB, BC, ad BK; & vt composita ex AB, BC, ad BK, sic (sumpta communi altitudine BD, ) rectangulum sub tali composita in DB, ad rectangulum DBK; & rectangulum sub composita ex AB, BC, in BD, diuiditur in duplum rectangulum CBD, & in rectangu-

lum ſub A C, in D B. Ergo, & vt rectangulum A B C, ad quadratum D B, cum rectangulo D B K, ſic rectangulum A C, D B, cum duobus rectangulis C B D, ad rectangulum D B K. Cùm ergo ſit, vt totum rectangulum A B C, ad totum, nempe ad quadratum D B, cum rectangulo D B K, ſic ablatum ad ablatum, nempe rectangulum A C, D B, cum duobus rectangulis C B D, ad ablatum rectangulum D B K; ergo, & vt totum ad totum, ſeù vt A E, ad E C, ſic reliqum ad reliqum, nempe ſic ex-

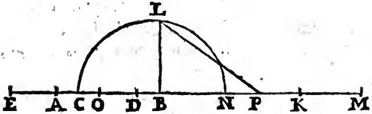



ceſſus rectanguli A B C, ſuper rectangulum A C, D B, & ſuper duo rectangula C B D, ad quadratum D B. Ergo, & componendo, vt A C, ad C E, ſic talis exceſſus, cum quadrato D B, ad quadratum D B. Sed talis exceſſus, cum quadrato D B, facit rectangulum A D C. Nam, duo quadrata C B, B D, excedunt duo rectangula C B D, quadrato C D; & rectangulum A C B, excedit rectangulum A C, D B, rectangulo A C D, quod cum quadrato C D, facit rectangulum A D C. Ergo, & vt A C, ad C E, ſic rectangulum A D C, ad quadratum D B. Quod erat faciendum.

Quòd

Quòd verò assumptum est, nempe punctum D, cadere inter C,B, patet ex processu demonstrationis. Quia non in C. Nam, cùm probatum sit, vt A E, ad E C, sic rectangulum A B C, ad quadratum D B, cum rectangulo D B K, nempe ad rectangulum K D B, nempe, ex suppositione, ad rectangulum K C B; & cùm sit, vt rectangulum A B C, ad rectangulum K C B, sic A B, ad K C; erit vt A E, ad E C, sic A B, ad C K. Sed pariter factũ est, vt A E, ad E C, sic A B, cum B C, ad B K. Ergo esset etiam, vt A B, ad C K, sic A B, cum B C, ad B K, minorem C K. Quod est absurdum. Et multò maius absurdum concluderetur si punctum D, caderet vltra C. Ergo cadit inter C, B.

SI Verò proportio data sit defectus, sit ea, quam habet A C, ad C E; & fiat, vt E A, ad A C, sic, & du-

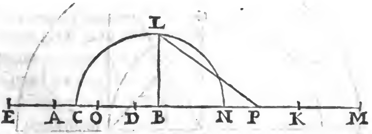



pla C B, ad B K, & E C, ad K M, positas in directum, tùm inter se, tùm ipsi A B, & diuisa B K, bifariam in N, super C N, fiat semicirculus, & à puncto B, erigatur perpendicularis B L. Pariter secetur B M, bifariam in P, & iuncta L P, fiat ei æqualis P D, (ostendetur inferius punctum D, cadere inter C, B,) & ipsi D B, fiat æqualis C O. Dico punctum O, esse quæsitum.

Eodem

Eodem enim modo, quo factum est suprà, ostendetur, quadratum L *B*, esse æquale quadrato D *B*, cum rectangulo D *B* M, ac proinde etiam rectangulũ C *B* N, esse æquale quadrato D *B*, cum rectangulo D *B* M. Sed quoniam factum est, vt E A, ad A C, sic dupla C *B*, ad *B* K, seù C *B*, ad B N; & vt C *B*, ad *B* N, sic quadratum C *B*, ad rectangulum C *B* N, seù ad ei æquale quadratum D *B*, cum rectangulo D *B* M. Ergo, & vt E A, ad A C, sic quadratum C B, ad quadratum D *B*, cum rectangulo D *B* M. Rursùm, quoniam supra factum est, vt E A, ad A C, sic tam E C, ad K M, quàm dupla C *B*, ad B K; ergo erit, vt E A, ad A C, sic ambo antecedentia ad ambo consequentia, nempe E C, cum dupla C *B*, ad totam *B* M. Sed vt E C, cum dupla *B* C, ad *B* M, sic (sumpta communi altitudine D *B*,) rectangulum sub E C, in D *B*, cum duplo rectangulo C *B* D, ad rectangulum D *B* M. Ergo, & vt quadratum C *B*, ad quadratum D *B*, cum rectangulo D *B*M, sic rectangulum E C, D *B*, cum duobus rectangulis C *B* D, ad rectangulum D *B* M. Cùm ergo sit, vt totum ad totũ, sic ablatum ad ablatum; ergo, & reliquum ad reliquum erit, vt totum ad totum, seù vt E A, ad A C. Ergo, & vt E A, ad A C, sic excessus quadrati C *B*, super rectangulum E C, D *B*, & super duo rectangula C *B* D, ad quadratum D *B*. Ergo, & componendo, vt E C, ad C A, sic excessus duorum quadratorum C *B*, *B* D, super rectangulum E C, D *B*, & super duo rectangula C *B* D, ad quadratum D *B*. Et conuertendo, vt quadratum D *B*, seù, vt quadratum C O, (quia C O, facta est æqualis D *B*,

DB, ) ad excessum quadratorum CB, BD, vel CO, super rectangulum EC, DB, seù ECO, & super duo rectangula CBD, seù BCO; sic AC, ad CE. Sed, & vt AC, ad CE, sic rectangulum ACO, ad rectangulum ECO. Ergo, & vt AC, ad CE, tàm est quadratum CO, ad excessum duorum quadratorum CB, CO, super rectangulum ECO, & super duo rectangula BCO, quàm rectangulum ACO, ad rectangulum ECO. Quare, & vt vnum antecedentium ad vnum consequentium, seù, vt AC, ad CE, sic ambo ante-



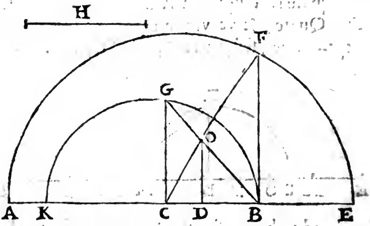

cedentia ad ambo consequentia, nempe sic quadratum CO, cum rectangulo ACO, nempe rectangulũ AOC, ad excessum duorum quadratorum BC, CO, solum, super duo rectangula BCO, nempe ad quadratum OB. Quod erat faciendum.

Quòd autem assumptum est, nempe punctum D, cadere inter C, B, patet. Quia non in C; nam cùm probatum sit, esse, vt EA, ad AC, sic quadratum CB, ad rectangulum MDB, nempe in tali casu, ad rectangulum MCB; & cùm sit, vt quadratum CB, ad rectangulum MCB, ita CB, ad CM; esset, & vt EA, ad AC, sic CB, ad CM. Quòd est absurdũ, quia supra

factum

factum est, vt E A, ad A C; sic C B, ad solam B N. Et maius absurdum concluderetur, si punctum D, caderet vltra C. Ergo patet propositum.

SED præsens Lemma potest vnica demonstratione comprehendente omnes casus facilius solui, sed per locum solidum, quàm non erit inutile hic subingere.




Sit ergo data A B, diuisa in C, vt supra, & data ratio sit, quam habet A C, ad H. Producatur A B, in E, vt C B, B E, sint æquales; & facta A E, diametro semicirculi, erigatur à puncto B, perpendicularis B F; & circa axim C B, diametro transuersa A C, per prop. 53. primi conicorum, describatur hyperbola transiens per punctum F, cuius vertex sit C; deinde fiat, vt H, ad A C, sic C B, ad C K, vbicumque cadat punctum K, & super K B, fiat semicirculus ad eandem partem cum priori, ac à puncto C, erecta perpendiculari C G, ducatur G B, secans hyperbolam in puncto O; demissa ergo

ergò à puncto O, perpendiculari O D, super A B, secante ipsam in D. Dico punctum D, esse quæsitum.

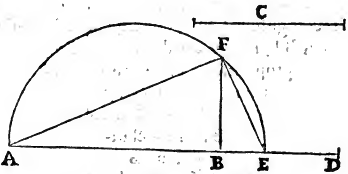
Etenim, propter similitudinem triangulorum G B C, O D B, est, vt G C, ad C B, sic O D, ad D B; & pariter est, vt quadratum G C, ad quadratum C B, sic quadratum O D, ad quadratum D B. Sed, vt quadratum G C, ad quadratum C B, sic K C, ad C B, nempe A C, ad H, (factum est enim supra, vt H, ad A C, sic B C, ad C K; quare conuertendo, erit, vt K C, ad C B, sic A C, ad H.) Ergo, vt A C, ad H, sic quadratum O D, nempe rectangulum A D C, (quod ei ostendetur æquale) ad quadratum D B. Quod erat faciendum.

Quòd verò rectangulum A D C, sit æquale quadrato D O, sic patebit. Nam, quia B C, est æqualis B E, rectangulum A B C, erit æquale rectangulo A B E, nempe quadrato B F. Sed, ex propositione 21. primi conicorum, est vt rectangulum A B C, ad quadratum B F, sic rectangulum A D C, ad quadratum D O. Quare patet propositum.

# LEM. XXXV. PROP. LVIII.

Data base trianguli rectanguli, & data media proportionali inter compositam, ex hypotenusa, & perpendiculo, & ipsum perpendiculum, inuenire triangulum.

DAta basis sit A B, & data media proportionalis sit C, & oporteat inuenire triangulum. Fiat, vt A B, ad C, sic C, ad B D, positam in directum ipsi A B; deinde data A D, secta in B, rursùm secetur in E, vt re-




ctangulum A E B, sit æquale quadrato D E, per propositionem antecedentem, & super A E, fiat semicirculus, ac à puncto B, erigatur perpendicularis B F, & ducantur A F, F E. Dico triangulum A F B, esse quæsitum.

Quo-

Quoniam enim rectangulum A E B, est æquale tàm quadrato E D, quàm quadrato E F; ergo, & duo quadrata E D, E F, pariter duæ lineæ E D, E F, erunt æquales. Tunc; quoniam rectangulũ A B D, est æquale quadrato C, per constructionem, & pariter est æquale rectangulis A B E, & A B, E D; ergo, & quadratum C, erit æquale rectangulo A *B* E, nempe (quadrato B F,) & A B, E D, nempe A B, F E, quia duæ D E, F E, ostensæ sunt æquales. Sed, propter similitudinem triangulorum rectangulorum A *B* F, *B* F E, rectangulo A *B*, F E, est æquale rectangulum A F *B*. Ergo quadratum C, erit æquale quadrato F *B*, & rectangulo A F *B*, nempe rectangulo sub composita, ex hypotenusa A F, & perpendiculo F *B*, & sub perpendiculo F *B*. Quare patet propositum.

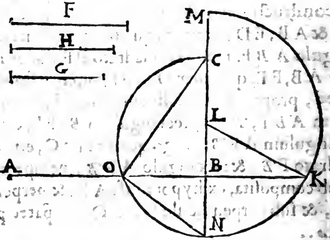
## LEM. XXXVI. PROP. LIX.

Datis iisdem, quæ in propositione 55. facere eadem, quæ ibidem, vt quadratum F, sit ad rectangulum C O B, cum quadrato O B, in data proportione.

SIT data proportio, quàm habet F, ad G, & inter F, G, inueniatur media H. Data autem *B* C, base trianguli rectanguli, & data H, media proportionali

 inter

inter compositam, ex hypotenusa, & perpendiculo, & ipsum perpendiculum, inueniatur triangulum C O Ƶ. Dico factum esse, quod proponebatur.



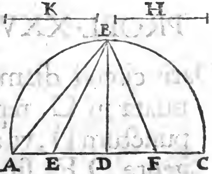

Quoniam enim rectangulum sub composita ex C O, & O Ƶ, & sub O Ƶ, est æquale quadrato H; ergo quadratum F, ad hæc, habebit eandem proportionem. Sed quadratum F, ad quadratum H, est vt F, ad G. Ergo, & vt F, ad G, sic quadratum F, ad rectangulum sub composita ex C O, O Ƶ, in O B, nempe ad rectangulum C O B, cum quadrato O B. Quod erat faciendum.

PRO-

# PROBL. XXIV. PROP. LX.

Datis iisdem, quæ in superiori Problemate, facere eadem, quæ ibidem, vt totus perimeter portionis sit ad totum perimetrum coni, in data proportione.

EXponatur linea K, potens simul duo quadrata BA, AD; & data ratio sit, quàm habet AD, ad H. Datis autem duabus AD, DB, continentibus angulum rectum ADB, ducatur à puncto B, linea BE, vt sit, vt AD, ad H, sic quadratum K, ad rectangulum BED, cum quadrato ED, per antecedentem propositionem, & fiat conus EBF. Quem dico esse quæsitum.




Quia, vt AD, ad H, sic quadratum K, nempe duo quadrata BA, AD, ad rectangulum BED, cum quadrato ED, nempe, ex Archimede, totus perimeter portionis ABC, ad totum perimetrum coni EBF. Quod erat faciendum.

SCHO-

# SCHOLIVM.

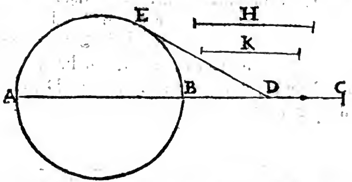
QVamuis Propositione 57. propositum sit Lemma sic vniuersaliter, attamen, vt patuit Propositione 58. non indigebamus ipso ad solutionem antecedentis Problematis, sic vniuersaliter proposito, sed tantùm in proportione æqualitatis. Verùm ad vberiorem scientiam, & quia ex ipso dependent alia Problemata, quamuis non pertinentia, nec ad conos, neque ad sphæras, nec ad superficies conicas, nec ad superficies sphæricas; proposuimus ipsum vniuersaliter. Vt ergo capiamus fructum ex ipso manantem, soluemus duo sequentia Problemata.

## PROBL. XXV. PROP. LXI.

Datis circuli diametro A B, continuata in C, reperire inter B, C, punctum D, vt ab ipso ducta tangente D E, sit hæc ad D C, in data proportione.

DAta ratio sit, quàm habet A B, ad H, quæ continuetur ad tertium terminum K; deinde, per Propositionem 57. data A C, secta in B, taliter secetur in D, inter C, B, vt rectangulum A D B, sit ad quadratum

tum D C, vt A B, ad K; & à puncto D, ducatur tangens D E. Dico factum esse, quod proponebatur.



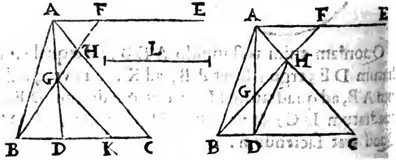

Quoniam enim rectangulo A D B, est æquale quadratum D E; ergo, & vt A B, ad K, seu, vt quadratum A B, ad quadratum H, ita erit quadratum D E, ad quadratum D C; & vt A B, ad H, sic D E, ad D C. Quod erat faciendum.

## PROBL. XXVI. PROP. LXII.

In triangulo B A C, à puncto A, sint ductæ duæ lineæ, A D, occurrens B C, inter B, C, & A E, parallela B C, indefinita; à puncto B, ducere B G H F, tali lege, vt quadratum B G, ad rectangulum F G H, sit in data proportione.

Data

Data recta BC, secta in D, rursùm secetur in K, inter D, C, per propositionem 57. vt rectangulum BKD, sit ad quadratum KC, in data proportione, quæ sit ea, quam habet v. g., BC, ad L, & per punctum K, ducatur KG, parallela CA, occurrens AD, in G, & per puncta B, G, ducatur linea BGHF, secans AC, in H, & occurrens AE, in F. Dico lineam BF, esse quæsitam.




Quoniam enim rectangulum BKD, ad quadratum KC, habet rationem compositam ex rationibus BK, ad KC, & DK, ad KC; ergo, & ratio BC, ad L, componetur ex istis proportionibus. Sed vt BK, ad KC, sic (ob parallelas GK, AC,) BG, ad GH; & pariter, vt DK, KC, sic DG, ad GA, & (ob parallelas AF, BD,) vt DG, ad GA, sic BG, ad GF. Ergo, & BC, proportio ad L, componetur ex duplici proportione, nempe BG, ad GH, & BG, ad GF, quæ duæ faciunt rationem quadrati BG, ad rectangulum FGH. Quare patet propositum.

Quamuis verò hoc Problema sit sic vniuersale, attamen

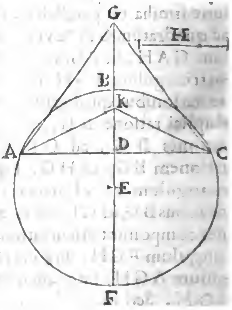
men non erit inutile tradere aliam propositionem in proportione æqualitatis, quæ non supponet propositionem 57.

Datis ergo, quæ supra, ducatur D H, parallela A B, & per B, & H, ducatur B G H F. Quàm dico esse quæsitam. Nam (ob parallelas H D, B A,) duo triangula A H *B*, A D B, sunt æqualia; & dempto communi triãgulo A G B, triangulum A G H, erit æquale triangulo B G D. Nunc; quoniam triangulum B G D, ad triangulum A G H, habet rationem compositam, ex ratione trianguli B G D, ad triangulum G A F, & trianguli G A F, ad triangulum G A H; vt autem triangulum B G D, ad triangulum G A F, sic (quia ista triangula sunt similia ob parallelas B D, A F,) quadratum G B, ad quadratum G F; & vt triangulum G A F, ad triangulum G A H, sic F G, ad G H. Ergo triangulum B G D, ad triangulum A G H, habet rationem compositam ex rationibus quadrati *B* G, ad quadratũ G F, nempe ex duplici ratione *B* G, ad G F, & G F, ad G H. Sed rationes B G, ad G F, & G F, ad G H, faciunt rationem B G, ad H G. Ergo triangulum B G D, ad triangulum A G H, habet rationem compositam, ex rationibus B G, ad G F, & B G, ad G H. Sed istæ duæ rationes componunt etiam rationem quadrati B G, ad rectangulum F G H. Ergo vt triangulum B G D, ad triangulum A G H, sic quadratum B G, ad rectangulum F G H. Sed triangulum *B* G D, probatum est æquale triangulo F G H. Quare &c. Quod &c.

# PROBL. XXVII. PROP. LXIII.

## Data sphæræ portione, constituere conum super eamdem basim portionis, vt portio sit ad conum in data proportione.

SIT data portio A B C, sphæræ, cuius diameter F B, centrum E, & data proportio sit, quam habet F D, ad H. Oportet facere &c. Fiat, vt F D, ad F D, cum F E, sic D B, ad D G, & fiat conus A G C, cuius axis sit G D. Ergo conus A G C, ex Archimede supra citato, est æqualis portioni A B C. Fiat ergo, vt F B, ad H, sic G D, ad D K, vbicumque cadat K, & fiat conus A K C. Quem dico esse quæsitum. Nam conus G A C, seu portio A B C, est ad conũ A K C, vt G D, ad D K; seu vt F B, ad H. Quod erat faciendum.

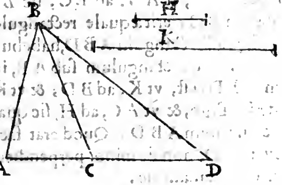



LEM-

# LEM. XXXVII. PROP. LXIV.

Dato quolibet triangulo A B C, cuius vertex B, ducere à vertice B, lineam B D, occurrentem lateri A C, etiam producto, vt quadratum vnius lateris, putà B C, sit ad rectangulum sub alio latere in ductam, nempe ad rectangulum A B D, in data proportione possibili.

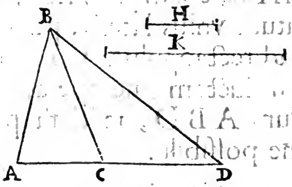
PRoportio possibilis est, quod si proportio sit excessus sit, non maior ea, quàm habet quadratum




B C, ad rectangulum sub B A, in perpendiculum, quia aliter B D, non esset ducibilis, cùm esset minor perpen-

 dicu-

diculo. Data ratio sit, quam habet A C, ad H, & fiat vt A B, ad B C, sic B C, ad K; & fiat vt A C, ad H, sic K, ad aliam, quæ non erit minor perpendiculo trianguli, vt patebit ex determinatione Lemmatis, ac proinde si ducatur à puncto B, occurret A C; occurrat in puncto D. Dico quadratum B C, esse ad rectan-




gulum A B D, in data proportione A C, ad H. Nam, quoniam factum est, vt A B, ad B C, sic B C, ad K; ergo quadratum B C, erit æquale rectangulo sub A B, & K. Ergo hęc ad rectangulũ A B D, habebunt eandem proportionem. Sed rectangulum sub A B, in K, ad rectangulum A B D, est, vt K, ad B D; & vt K, ad B D, sic A C, ad H. Ergo, & vt A C, ad H, sic quadratum B C, ad rectangulum A B D. Quod erat faciendum.

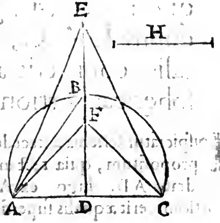
Quòd verò B D, non sit minor perpendiculo, patet, vt dixi, ex determinatione.

PRO-

# PROBL. XXVIII. PROP. LXV.

Datis iisdem, quæ in superiori Problemate, facere eadem, quæ ibidem, vt superficies sphærica portionis, sit ad superficiem conicam coni, in data proportione.

Data portio sit A B C, & data ratio sit, quam habet A D, ad H. Oportet facere, quod imperatum est. Ducatur B A. Infra patebit oportere proportionem datam minorem esse ea, quam habet quadratum A B, ad quadratum A D. A vertice ergo A, dati trianguli A D B, ducatur A E, occurrens D B, in E, vt quadratum A B, sit ad rectangulum E A D, vt A D, ad H; & ex triangulo E A D, reuoluto circa E D, fiat conus A E C. Dico conum A E C, esse quæsitum. Patet faciliter; nam superficies portionis A B C, ad superficiem coni E A C, est, ex Archimede sæpè citato, vt quadratum B A, ad rectangulum E A D, nempe vt A D, ad H. Quod erat faciendum.




Quòd

Quòd verò proportio data debeat esse minor ea, quàm habet quadratum B A, ad quadratum A D, patet; quia aliter cùm non possit duci A E, conus E A C, non esset construibilis.

# LEM. XXXIIX. PROP. LXVI.

Sit portio A B C, cuius vertex B, axis B D, diameter basis A C, & ducatur A B, fiatque vt D A, ad A B, ita A B, ad aliam, quæ erit ipsa A B, maior, & sit A E, occurrens D B, productæ in E. Dico, quod si ex triangulo E A D, fiat conus E A C, superficies conica talis coni erit æqualis superficiei sphericæ portionis A B C.

INspiciatur schema antecedentis Propositionis. Patet propositum, quia rectangulum E A D, est æquale quadrato A B. Ergo, ex Archimede, & superficies portionis, erit æqualis superficiei coni.

## COROLLARIUM.

EX dictis deducitur, totum perimetrum portionis, esse æquale toti perimetro coni, addita nempe basi communi.

SCHO-

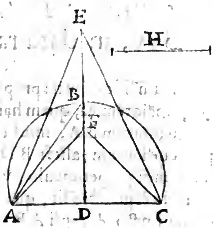
# SCHOLIVM.

HIC etiam non erit inutile notasse, quòd si portio sit hemisphærium, latus coni erit æquale diametro sphæræ, quia tunc A B, est media proportionalis inter A D, semidiametrum sphæræ, & diametrum. Notetur etiam, si placet, totum perimetrum coni esse triplum circuli maximi sphæræ; ac proinde se habere ad circulum maximum, seù ad suam basim, vt Cylindrus in eadem basi, & altitudine, ad conum.

# PROBL. XXIX. PROP. LXVII.

## Idem.

DAta proportio sit A D, ad H; & fiat conus A E C, cuius superficies sit æqualis superficiei sphæricæ portionis. Patet ergo faciliter, quod si Problema debet solui, oportet rationem A D, ad H, esse minorem ea, quam habet rectangulum E A D, ad quadratum A D. Fiat ergo, vt A D, ad H, sic E A, ad aliam, quæ ex determinatione erit maior A D, ac proinde, si ducatur à




puncto A, occurret D E, occurrat in F, & fiat conus AFC.

AFC. Quem aio esse quæsitum. Demonstratio est facilissima; quia vt A D, ad H, sic E A, ad A F, nempe, (sumpta communi altitudine A D,) rectangulũ E A D, ad rectangulum F A D. Nempe quadratum B A, æquale rectangulo E A D, ad rectangulum F A D. Nempe, superficies portionis A B C, ad superficiem coni A F C. Quod erat faciendum.

## LEM. XXXIX. PROP. LXVIII.

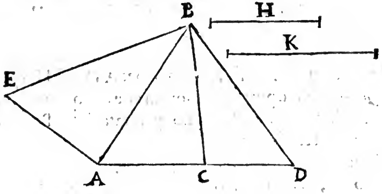
Dato triangulo A B C, cuius vertex B, ducere à vertice B, lineã B D, occurrentem A C, productæ (si opus sit) tali lege, vt duo quadrata C B, B A, sint ad rectangulum D B A; cum quadrato B A, in data ratione possibili.

Etiam hìc oportet proportionem datam non esse maiorem ea, quam habent duo quadrata C B, B A, ad quadratum B A, simul cum rectangulo sub B A, in perpendiculum; aliter B D, non posset duci, quia esset minor perpendiculo, vt consideranti patet.

Data ergo ratio sit, quam habet A C, ad H, & erigatur à puncto A, ipsi A B, perpendicularis A E, æqualis ipsi B C; & ducatur B E. Tunc fiat, vt A B, ad B E,

sic

ſic B E, ad K; deinde fiat vt A G, ad H, ſic K, ad aliam, quæ ex determinatione Problematis, non erit minor compoſita ex A B, & perpendiculo, vt patebit ex proceſſu demonſtrationis. Quare ſi ab ipſa auferatur æqualis A B, & reliqua ducatur à vertice B, vtique occurret A C. Occurrat ergo, & ſit B D.



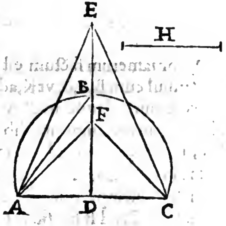

Quoniam enim factum eſt, vt A C, ad H, ſic K, ad D B ſimul cum B A, & vt K, ad D B, cum B A, ſic (ſumpta communi altitudine B A,) rectangulum ſub K, & ſub B A, ad rectangulum ſub compoſita ex D B, & B A, in A B, nempe ad rectangulum D B A, cum quadrato B A. Ergo, & vt A C, ad H, ſic rectangulum ſub K, in A B, nempe quadratum B E, (nam factum eſt ſupra, vt A B, ad B E, ſic B E, ad K,) ad rectangulum D B A, cum quadrato B A. Sed quadrato B E, ſunt æqualia duo quadrata B A, A E; & quadrato A E, eſt æpuale quadratum B C, ex conſtructione. Ergo, & vt A C, ad H, ſic quadrata A B, B C, ad rectangulum D B A, cum quadrato A B. Quod erat faciendum.

T PRO-

# PROBL. XXX. PROP. LXIX.

Datis iisdem, quæ in superiori Problemate; facere eadem, quæ ibidem, vt totus perimeter portionis, sit ad totum perimetrum coni, in data proportione.

DAta proportio sit, quam habet A D, ad H, quam patebit oportere minorem esse ea, quam habent duo quadrata B A, A D, ad duo quadrata A D. Per Lemma ergo antecedens vniuersalius propositum, à puncto A, vertice dati trianguli B A D, ducatur A F, vt duo quadrata B A, A D, sint ad rectangulum F A D, cum quadrato A D, vt A D, ad H; & ex triangulo F A D, reuoluto circa F D, fiat conus A F C. Quem dico esse quæsitum.




Nam, vt A D, ad H, sic duo quadrata B A, A D, ad rectangulum F A D, cum quadrato A D, nempe, ex sæpe dictis, perimeter portionis A B C, ad perimetrum coni A F C. Determinatio est euidens, quia aliter Problema esset insolubile, vt consideranti fiet manifestum.

PRO-

# PROBL. XXXI. PROP. LXX.

## Idem.

HOC idem Problema soluetur aliter, & facilius. Inueniatur conus E A C, cuius perimeter sit æqualis perimetro portionis A B C. Deinde fiat, vt A D, ad H, sic E A, cum A D, ad aliam, quæ ex determinatione, erit maior dupla A D. Quare, si ex ipsa auferatur æqualis A D, reliqua erit maior ipsa A D. Ergo poterit duci à puncto A, in D B. Ducatur ergo vbicunque cadat, & sit A F; & fiat conus, vt prius, A F C. Quem assero esse quæsitum.

Demonstratio est facilis; quia vt A D, ad H, sic E A, cum A D, ad F A, cum A D, nempe (sumpta communi altitudine A D,) rectangulum E A D, cum quadrato A D; nempe perimeter coni A E C, ad perimetrum coni A F C. Quod erat faciendum.

## SCHOLIVM.

DVo sequentia Problemata, quoad solida ab alijs demonstrantur, ac soluuntur, à nemine verò, quod sciam, quoad superficies; quare ipsos soluemus quoad superficies.

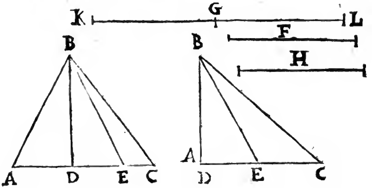
# LEM. XL. PROP. LXXI.

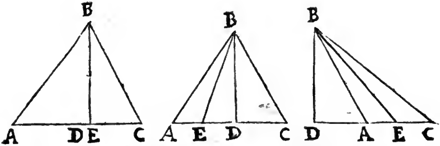
In dato triangulo ducto perpendiculo ab angulo verticis in basim, ducere ab eodem angulo aliam lineã in basim protractam etiam si opus sit, vt rectangulum sub ducta, & sub perpendiculo, vna cum rectangulo sub vno latere, & sub eodem perpendiculo, sit ad hoc idẽ rectangulum, cum quadrato alterius lateris, in data proportione.

DAtum triangulum sit ABE, data verò ratio, quã habet AB, ad H; & sit ducta perpendicularis BD. Oportet à puncto B, ducere BC, vbicunque, occurrentem AE, vt rectangulum CBD, cum rectan- ABD, sit ad idem rectangulum ABD, cum quadrato BE, vt AB, ad H.

Patet in primis, Lemma quinque habere casus, secundum diuersitatem anguli verticalis, & diuersum modum casus perpendiculi. Potest enim, vel cadere inter A, E, vt in prima figura; vel in ipso puncto A, vt in secunda, quando scilicet perpendiculum est idem, ac latus BA; vel in ipso puncto E, vt in tertia, quando scili-

ſcilicet eſt idem, ac latus B E; vel extra A E, ad partes E, vt in quarta; vel tandem extra A E, ad partes A, vt in quinta. In primo, quarto, & quinto caſu, oportet, quod ſi proportio ſit minoris inæqualitatis, tamen ſemper ſit

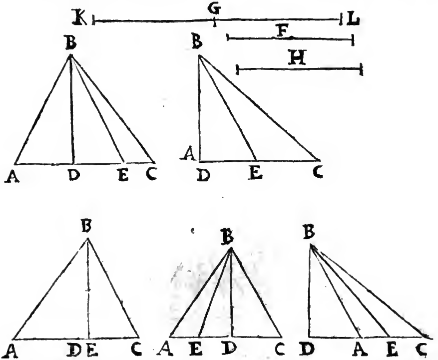



maior ea, quam habet rectangulum A B D, cum quadrato B D, ad rectangulum A B D, cum quadrato BE. In ſecundo caſu oportet eſſe maiorem ea, quam habent duo quadrata B A, ad quadrata B A, & , B E. Tādem in tertio caſu, oportet ſemper eſſe proportionem maioris inæqualitatis. Determinationes facilè erunt manifeſtæ conſideranti; nam, ſi aliter eſſet, quam determinatum eſt, B C, non poſſet duci; nam, vel eſſet æqua-

lis

lis B D, vel minor ea. His præhabitis. Fiat, vt perpendiculum B D, ad latus *B* E, sic B E, ad F; deinde fiat vt H, ad A B, sic composita ex A *B*, & F, ad K L, quam aio futuram maiorem ipsis *A* B, B D, (vt patebit inferius.) Si ergo à maiori K L, auferatur K G, æqua-




lis *A* B, reliqua G L, erit maior B D. Ergo poterit duci à puncto B, ad aliquod punctum lineæ *A* E, etiam productæ, si opus sit; ducatur, & sit B C. Dico factum esse, quod proponebatur. Patet. Nam, quoniam factum est, vt H, ad *A* B, sic *A* B, cum F, ad K L, nempe ad duas A B, B C; ergo conuertendo, erit vt *A* B, ad H, sic *A* B, cum B C, ad *A* B, cum F. Sed vt C B, cum

B *A*,

BA, ad BA, cum F, ſic (ſumpta communi altitudine BD,) rectangulum CBD, cum rectangulo ABD, ad idem rectangulum ABD, cum rectangulo ſub B D, in F, nempe cum quadrato B E, (quia factum eſt, vt BD, ad BE, ſic BE, ad F.) Ergo vt AB, ad H, ſic duo rectangula CBD, & ABD, ad idem rectangulum ABD, cum quadrato BE. Quod erat faciendum.

Quòd KL, ſit maior AB, B D, patet ex proceſſu demonſtrationis, & ex Lemmatis determinatione.

## SCHOLIVM.

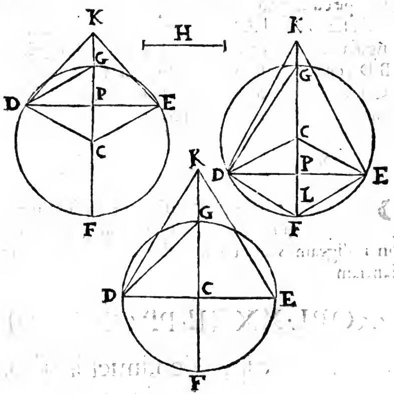
Propoſuimus hanc propoſitionem adeò vniuerſaliter, quamuis pro ſolutione futuri Problematis, non indigeamus tanta vniuerſalitate, ad vberiorem ſcientiam.

## PROBL. XXXII. PROP. LXXII.

Dato ſectore ſphærico, inuenire rhombum conicum, cuius vnus conus ſit idem, ac conus ſectoris, & baſis conorum ſit baſis coni ſectoris, adeò vt ſuperficies rhombi, ſit ad ſuperficiem ſectoris, in data proportione.

Hoc

HOC Problema triplicem habet casum, secundùm quod sector, vel est maior, vel minor, vel æqualis hemisphærio, scilicet quando sector degenerat




in hemisphærium; & secundùm diuersos casus, Problema recipit diuersas determinationes. Sit ergo sphæra, cuius diameter GF, centrum C, & sit sector DGEC, vel minor hemisphærio, vt in prima figura, vel maior, vt in secunda, vel æqualis, vt in tertia, (quamuis impropriè hemisphærium dicatur sector, sicut, & rhombus inueniendus, non est rhombus, sed conus, quia hemi-

hemisphærij non est conus ) Pariter in secunda figura, sector maior hemisphærio non habet conum, sed est minor portione D G E P, quantitate coni D C E. Intelligatur circulus maximus D G E F, ortus ex sectione, & reliqua, vt moris est; & in omni casu, ducta D G, ac in secunda figura, facta P L, æquali P C, & iunctis D L, L E, ac intellectis conis D C E, D L E, patet istos esse æquales. Data ergo ratio sit, quam habet F C, ad H. Oportet, quod si hæc sit minoris inæqualitatis, sit tamen in primo, & secundo casu, maior ea, quam habet rectangulum C D P, cum quadrato D P, ad rectangulum C D P, cum quadrato D G. In tertio verò casu, oportet maiorem esse ea, quam habent duo quadrata C D, ad quadratum C D, cum quadrato D G. Tunc, per antecedēs Lemma, dato triangulo C D G, & ducto perpendiculo D P, ducatur D K, vt rectangulum C D P, cum rectangulo K D P, ad rectangulum C D P, cum quadrato D G, sit vt F C, ad H, & intelligatur rhombus K D C E, in prima, K D L E, in secunda, & conus K D E, in tertia figura. Dico factum esse, quod proponebatur.

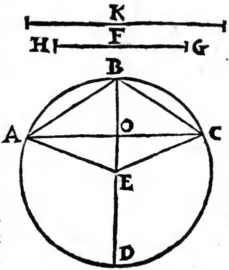
Nam, in prima figura, proportio rectangulorum C D P, & K D P, ad rectangulum C D P, cum quadrato D G, est eadem cum proportione perimetri rhombi K D C E, ad superficiem sectoris D G C E, ex Archimede sæpe citato. In secunda verò figura, est eadem cum proportione superficiei rhombi K D L E, ad superficiem sectoris D G E C. Quia superficies sectoris constat ex superficie sphærica portionis D G E, & conica coni D C E, cui est æqualis conica coni D L E. In tertia

figura autem, est eadem cum ea, quam habet totus perimeter coni K D E, ad totum perimetrum hemisphærij D G E.

Determinationes, & reliqua, petenda sunt ex antecedenti Lemmate; nam præsens Problema, aliud non est, quam antecedens Lemma.

# PROBL. XXXIII. PROP. LXXIII.

## In data sphæra reperire sectorem, cuius superficies sphęrica, sit ad superficiem conicam sui coni, in data proportione.




Datæ sphæræ sit diameter D B, centrũ E, & data proportio sit, quam habet B E, ad H F. Oportet facere, quod imperatum est. Sumatur ipsius H F, dupla H G, & fiat, vt E B, ad H G, sic H G, ad K; deinde diuidatur B D, in O, vt sit, sicut B E, ad K, sic B O, ad O D, vbicunque cadat punctũ O, & per O, ducatur

tur perpendicularis A O C, ipsi B D, & reliqua fiant, vt in schemate; & intelligantur solida, &c. Dico inuentũ esse sectorem A B C E, siue maiorem, siue minorem hemisphærio, cuius superficies sphærica A B C, sit ad superficiem conicam coni A E C, vt B E, ad H F. Nam, quoniam factum est, vt E B, ad K, sic B O, ad O D, & proportio B E, ad H G, est subduplicata proportionis B E, ad K, & pariter proportio B O, ad O A, est subduplicata proportionis B O, ad O D. Ergo, & vt B E, ad H G, sic B O, ad O A. Et ad consequentium dimidias. Ergo vt B E, ad H F, sic B O, ad dimidiam A O. Sed, vt B O, ad dimidiam A O, sic (sumpta communi altitudine B D,) rectangulum D B O, nempe ei æquale quadratum A B, ad rectangulum sub D B, in dimidiam A O, nempe ad rectangulum sub dimidia B D, nempe sub A E, in totam A O. Ergo vt B E, ad H F, sic quadratum A *B*, ad rectangulum E A O; nempe superficies sphærica portionis A *B* C, ad superficiem conicam coni E A C. Quod erat faciendum.

# SCHOLIVM.

VT diximus supra, hoc Problema comprehendit, tàm sectores maiores, quàm minores hemisphærio, & semper punctum O, diuidet B D, vt possit fieri conus, præterquamquod, quando proportio erit dupla, quia tunc, punctum O, cadet in E, nempe in centro.

Dominus Ricardus Albius Anglus, Vir nobilitate sanguinis, ac eruditione conspicuus, in suo hemisphæ-

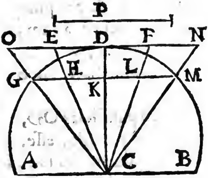
rio dissecto propos. 11. soluit hoc Problema. Conum segmenti, ad conum rectangulum, in quacumque data ratione constituere. Curauimus aliquando, soluere hoc Problema in superficiebus conicis, at animaduertimus, Problema posse proponi vniuersalius, nō solùm in cono rectangulo, sed in omni cono, & non solùm in hemisphærio, sed in quocumque solido rotundo orto ex reuolutione circa axem, cuius basis sit circulus; siue tale solidum sit quodlibet conoides, vel portio sphæræ, sphæroidis, vel solidum cycloidale, vel quodlibet aliud.

# PROBL. XXXIV. PROP. LXXIV.

Dato quolibet solido rotundo ADB, circa axim DC, cuius basis sit circulus, cuius diameter sit A C B, vertex eius sit punctum D, & dato cono ECF, circa eandē axem CD, cuius basis sit circulus EDF, tangens solidum in vertice D; secare solidum A D B, & conum ECF, plano GM, basi parallelo vt facto cono GCM, sit hic, ad conum HCL, abscisum à cono ECF, in data proportione.

Data

DAta proportio sit, quam habet C D, ad P, & fiat vt P, ad D C, sic quadratum D E, ad quadratum D O, & iuncta O C, per punctum G, vbi C O, secat superficiem solidi, ducatur planũ GHKLM, basi A C B, parallelum, & intelligantur coni G C M, H C L. Quos dico esse quæsitos Est enim, vt C D, ad P, sic quadratum O D, ad quadratum D E; nempe (ob parallelas OD, GK,) sic quadratum GK, ad quadratum H K. Vt autem quadratum G K, ad quadratũ H K, sic circulus, cuius diameter G M, ad circulum, cuius diameter H L, nempe conus G C M, ad conum H C L. Quod erat faciendum.

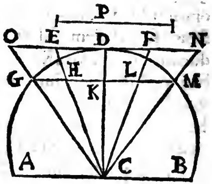



# PROBL. XXXV. PROP. LXXV.

## Datis ijsdem, quæ in superiori Problemate, facere eadem, quæ ibidem, vt superficies coni GCM, sit ad superficiem conicam coni HCL, vt CD, ad P.

INtelligantur omnia secta plano consueto modo; & datis duabus rectis lineis C D, D E, continentibus angu-

angulum rectum CDE, ducatur CO, vt rectangulum COD, sit ad rectangulum CED, in data proportione CD, ad P, per proposit. 55. & per punctum G, agatur planum, & fiant omnia, vt in superiori Problemate. Dico &c.




Nā, ob parallelas OD, GK, facilè patebit, esse, vt rectangulum COD, ad rectangulum CED, nempe, vt CD, ad P, sic rectangulum CGK, ad rectangulum CHK, nempe superficiem coni GCM, ad superficiem coni HCL. Quod erat faciendum.

## PROBL. XXXVI. PROP. LXXVI

Datis ijsdem, quæ in superiori Problemate, facere eadem, quæ ibidē, vt totus perimeter coni CGM, ad totum perimetrum coni CHL, sit vt CD, ad P.

AD soluendum hoc Problema, vtemur prop. 68. nempe, ducemus CO, vt rectangulum COD, cum quadrato OD, sit ad lineam potentem rectangulū CED, cum quadrato ED, vt CD, ad P; & per punctum

ctum G, ducetur planum, vt prius, & reliqua fient vt prius. Dico perimetrum coni GCM, esse ad perimetrum coni HCL, vt CD, ad P. Demonstratio est facilis, ac proinde omittitur.

# LEM. XLI. PROP. LXXVII.

Sit recta linea A B, secta in C, vel bifariam, vel non bifariam, sed adeò vt A C, sit maior C B. Si rursùm C B, secetur in D, & D C, secetur bifariam in E; tria rectangula A C B, erunt maiora tribus rectangulis A C, E B, tribus rectangulis E D B, & duobus quadratis C E.

QVoniam enim B E, maior est B D, & D E, E C, sunt æquales; ergo tria rectangula B E C, erunt maiora tribus rectangulis B D E. Sed & tria quadrata C E, sunt maiora duobus quadratis C E; ergo tria rectangula B E C, cum tribus quadratis C E; nempe tria rectangula B C E, erunt maiora tribus rectangulis B D E, & duobus quadratis C E. Sed, si linea A B,


secta

secta est bifaria in C, tria rectangula B C E, sunt æqualia tribus rectangulis A C E; si verò A C, est maior C B, tria rectangula A C E, sunt maiora tribus rectangulis BC E. Ergo, in vtroque casu, tria rectangula A C E, erunt maiora tribus rectangulis B D E, & duobus quadratis C E. Et communibus additis tribus rectangulis A C, E B. Ergo tria rectangula A C E, cum tribus A C, E B; quæ omnia faciunt tria rectangula A C B, erunt maiora tribus rectangulis A C, E B, tribus rectangulis E D B, & duobus quadratis C E. Quod erat ostendendum.

# SCHOLIVM.

Ex dictis clarè tenetur, quòd, cùm tria rect angula A C, E B, vna cum tribus rectangulis E D B, & cum duobus quadratis C E, sint minora, quam triplum vnius rectanguli A C B: Si proponatur. Datam rectam lineam A B, sectam in puncto C, rursùm secare in puncto D, inter C, B, vt rursùm secta D C, in puncto E, bifariam, tria rectangula A C, E B, cum tribus rectangulis E D B, & cum duobus quadratis C E, sint ad rectangulum A C B, in proportione, vel tripla, vel maiori tripla; tenetur dico, quod semper A C, debet esse minor C B. Et è contra, si proportio sit minor tripla, tenetur, Problema posse solui, siue A C, sit æqualis, siue maior C B.

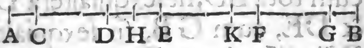
LEM-

# LEM. XLII. PROP. LXXVIII.

Sit recta linea A B, ſecta in punctis C, D, E, F, G, ſic, vt D C, ſit dupla A C; D F, ſit dupla FB; & DE, ſit dupla G B. Patet, quod, cum tota BD, ſit ſexquialtera D F, & DE, cum G B, ſit ſexquialtera DE, etiã reliqua E G, erit ſexquialtera E F. Si D E, ſecetur bifariam in H, tria rectangula CDF, cum rectangulo D E B, erunt æqualia, rectangulo A D E, triplo rectangulo C D, H F, triplo rectangulo H E F, & duplo quadrato D H.


QVoniam enim B G, & D H, ſunt æquales, quia dimidiæ eiuſdem D E; ergo rectangulum D E,
X G B,

GB, erit æquale rectangulo EDH, seu duobus quadratis DH. Communi addito rectangulo DEG. Ergo rectangulum DEG, cum rectangulo DE, GB, nempe totum rectangulum DEB, erit æquale rectangulo DEG, & duplo quadrato DH. Sed rectangulo DEG, est æquale triplum rectangulum HEF, quia GE, est sexquialtera EF, & DE, est dupla HE. Ergo rectangulum DEB, erit æquale triplo rectangulo HEF, & duplo




quadrato DH. Et communibus additis tribus rectangulis CDF. Ergo tria rectangula CDF, cum rectangulo DEB, erunt æqualia tribus rectangulis CDF, (nempe tribus rectangulis CDH, & tribus rectangulis CD, HF,) tribus rectangulis HEF, & duplo quadrato DH. Sed tria rectangula CDH, quia AD, est sexquialtera DC, & DE, est dupla DH, faciunt rectangulum ADE. Ergo tria rectangula CDF, cum rectangulo DEB, erunt æqualia rectangulo ADE, triplo rectangulo CD, HF, triplo rectangulo HEF, & duplo quadrato DH. Quod erat ostendendum.

# SCHOLIVM I.

Ex dictis infertur, quod si DF, sit maior DC, vnde, & DB, sexquialtera DF, sit maior AD, sexquialtera CD, & ex DB, auferatur KB, æqualis AD. Infer-

fertur inquam, quod, cùm tunc, duo rectangula A D F, & D E, K B, sint æqualia, si hæc hinc inde auferantur, etiam reliqua remanebunt æqualia. Vnde, tria rectangula C D F, cum rectangulo D E K, erunt æqualia tribus rectangulis C D, H F, tribus rectangulis H E F, & duobus quadratis D H.

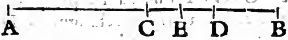
# SCHOLIVM II.

Infertur secundò, quod si imperetur. Datam C F, sectam in puncto D, rursùm diuidere in E, vt diuisa D E, bifariam in H, tria rectangula C D, H F, vna cum tribus rectangulis H E F, & cum duobus quadratis D H, sint ad rectangulum C D F, in data proportione maiori, quam tripla. Infertur inquam, quòd Problema erit determinatum. Et determinatio erit, vt facta D B, sexquialtera D F, & ab ipsa ablata B K, sexquialtera C D, proportio data, non sit maior ea, quam habet triplum rectangulum C D F, cum quadrato dimidiæ D K, ad rectangulum C D F. Nam, cum supra probatum sit, illa plana esse æqualia triplo rectangulo C D F, & rectangulo D E K, patet, quod ex omnibus rectangulis factis sub segmentis D K, diuisæ in puncto, rectangulum sub partibus æqualibus, seù quadratum dimidiæ, est maximum.

# LEM. XLIII. PROP. LXXIX.

Si recta linea A B, ſit taliter ſecta in C, vt A C, ſit, vel minor, vel æqualis tertiæ parti C B; & rurſum C B, ſecetur in D, & C D, ſecetur bifaria in E. Tria rectangula A C B, erunt minora tribus rectangulis A C, E B, tribus rectangulis E D B, & duobus quadratis C E.

QVoniam enim B C, eſt vel tripla, vel maior tripla A C. Ergo rectangulum B C E, erit, vel æquale, vel maius triplo rectangulo A C E. Sed rectangulũ




B C E, eſt æquale rectangulo B D E, & duplo quadrato D E, vel C E, vt conſideranti patet. Ergo, & rectangulum B D E, cum duplo quadrato C E, erit abſolutè maius, triplo rectangulo A C E. Et communi addito triplo rectangulo A C, E B. Ergo triplum rectangulum A C, E B, cum triplo rectangulo E D B, & cum duobus quadratis C E, erit maius triplo rectangulo A C E, &

triplo

triplo rectangulo A C, E B; quæ omnia faciunt tria rectangula A C B. Quare patet propositum.

# SCHOLIVM.

EX dictis infertur, quod si linea A B, secta in C, proponatur taliter secanda in D, vt secta C D, in E, bifariam, tria rectangula A C, E B, cum tribus rectangulis E D B, & cum duobus quadratis C E, sint, vel tripla, vel minora, quam tripla, rectanguli A C B: Infertur inquam, quod A C, non potest esse, nec minor, nec æqualis tertiæ parti C B, sed maior.

# LEM. XLIV. PROP. LXXX.

Si linea A B, secta bifaria in C, rursum secetur in D, inter C, B, & C D, secetur bifaria in E. Tria rectangula A C B, minus quadrato C D, erunt æqualia tribus rectangulis A C, E B, tribus rectangulis E D B, & duobus quadratis C E.

QVoniam enim, tria rectangula B C E, sunt æqualia tribus rectangulis B D E, & sex quadratis D E, vel

vel C E, vt consideranti patet; & pariter sunt æqualia tribus rectangulis A C E; ergo tria rectangula A C E, erunt æqualia tribus rectangulis B D E, & sex quadratis C E. Et communibus additis tribus rectangulis A C,

A C E D B

E B. Ergo tria rectangula A C E, cum tribus rectangulis A C, E B, quæ omnia faciunt tria rectangula A C B, erunt æqualia tribus rectangulis A C, E B, tribus rectangulis E D B, & sex quadratis C E. Et ablatis hinc inde quatuor quadratis C E, quæ sunt æqualia quadrato C D. Ergo tria rectangula A C B, minus quadrato C D, erunt æqualia tribus rectangulis A C, E B, tribus rectangulis E D B, & duobus quadratis C E. Quod erat faciendum.

# SCHOLIVM.

EX hoc Lemmate habemus, quod tria rectangula A C, E B, cum tribus rectangulis B D E, & cum duobus quadratis C E, erunt maiora, quam dupla rectanguli A C B. Nam ostensa sunt æqualia tribus rectangulis A C B, minus quadrato C D. Sed hæc sunt maiora quam dupla rectanguli A C B; quia quadratum C D, est minus quadrato C B, nempe vno rectangulo A C B. Vnde habemus, quod si proponatur. Diuidere lineam A B, sectam bifariam in C, rursùm in D, vt diuisa C D, bifariam in E, tria rectangula A C, E B, cũ tribus B D E,

&

& cum duobus quadratis C E, ſint ad rectangulum A C B, in data proportione minori tripla, hæc tamen proportio debet eſſe maior dupla.

## LEM. XLV. PROP. LXXXI.

Sit recta linea A B, taliter ſecta in C, vt A C, ſit maior C B, & C F, ſit ſexquialtera C A, & F K, ſit ſexquialtera C B, quæ C B, ſit ſecta vtcumque in M, & C M, ſit ſecta bifariam in N. Tria rectangula A C B, minus rectangulo K M C, erunt æqualia tribus rectangulis A C, N B, tribus rectangulis N M B, & duobus quadratis C N.

Fiat C G, ſexquialtera B C. Quoniam G C, eſt æqualis F K, quia ambæ factæ ſunt ſexquialteræ C B; ergo rectangulum F K, C M, erit æquale rectangulo G C M, nempe rectangulo B C M, & rectangulo G B, M C. Sed rectangulum G B, M C, eſt æquale rectangulum B C N, quia B C, eſt dupla G B, & C N, eſt dimi-

dia

dia C M; & rectangulum B C N, est æquale rectangulo B M N, & duplo quadrato C N, vt consideranti patet; & pariter rectangulum B C M, est æquale quadrato C M, & rectangulo B M C, nempe duplo rectangulo B M N. Ergo rectangulum F K, C M, erit æquale tribus rectangulis B M N, duobus quadratis C N, &, quadrato C M. Et communi addito rectangulo K C M. Ergo duo rectangula F K, C M, & K C M, nempe rectangulum F C M, erit æquale tribus rectangulis B M N, duobus quadratis C N, quadrato C M, & rectangulo K C M. Sed quoniam rectangulũ F C M,

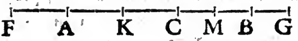

est æquale triplo rectangulo A C N, quia F C, est sexquialtera A C, & C M, est dupla C N; &, pariter rectangulum K C M, cum quadrato C M, facit rectangulum K M C. Ergo, & triplum rectangulum A C N, erit æquale triplo rectangulo N M B, duplo quadrato C N, & rectangulo K M C. Quo ablato hinc inde, & additis tribus rectangulis A C, N B. Ergo tria rectangula A C N, cum tribus rectangulis A C, N B, (quæ faciunt tria rectangula A C B,) minus rectangulo K M C, erunt æqualia tribus rectangulis A C, N B, tribus rectangulis B M N, & duobus quadratis C N. Quod erat ostendendum.

LEM-

# LEMMA XLVI. PROP. LXXXII.

**Sit recta linea F B, secta in punctis A, K, C, vt in superiori Lem. sed. C B, sit secta tantùm bifariam in M. Tria rectangula A C B, minus rectangulo K B C, erunt æqualia tribus rectangulis A C, M B, & duobus quadratis C M.**

Fiat G C, sexquialtera C B. Quoniam F K, & G C, sunt æquales, quia ambæ sexquialteræ C B; ergo rectangulum F K, C B, erit æquale rectangulo G C B, nempe rectangulo G B C, & quadrato B C. Sed quia tres G B, B M, & M C, sunt æquales, rectangulum




G B C, est æquale duplo quadrato B M, vel M C. Ergo rectangulũ F K, C B, erit æquale duplo quadrato C M, & quadrato C B. Et communi addito rectangulo K C P. Ergo duo rectangula F K, C B, & K C B, nempe rectangulum F C B, erit æquale duobus quadratis C M, quadrato C B, & rectangulo K C B. Sed rectangulum F C B, est æquale tribus rectangulis A C M, quia F C, est sexquialtera C A, & B C, est dupla C M; & pariter

rectangulum K C B, cum quadrato C B, facit rectangulum K B C. Ergo tria rectãgula A C M, erunt æqualia duobus quadratis C M; & rectangulo K BC. Quo hinc inde ablato, & additis tribus rectangulis A C, M B. Ergo tria rectangula A C M, cum tribus rectangulis A C, M B, nempe tria rectangula A C B, minus rectangulo K B C, erunt æqualia tribus rectangulis A C, M B, & duobus quadratis C M. Quod erat ostendendum.

# SCHOLIVM.

CVM linea F B, sit eadem in duabus propositionibus superioribus, & eodem modo diuisa, præterquam quod in 82. linea C B, tantùm diuiditur bifariam, & in 81. diuiditur prius in M; postea C M, bifariam in N; & cum rectangulum K B C, sit maius rectangulo K M C, & quocumque alio K M C, quod habeatur secando lineam C B, in puncto M; sequitur etiam, quod tria rectangula A C B, minus rectangulo K B C, sint minora quibuscunque tribus rectangulis A C B, minus rectangulo K M C, quod habeatur ex tali sectione. Vnde, si proponatur. Datam lineam A B, sectam in puncto C, adeò vt A C, sit maior C B, rursùm diuidere in M, inter C, B, vt secta bifariam C M, in N, tria rectangula A C, N B, cum tribus rectãgulis N M B, & cum duobus quadratis C N, sint ad rectangulum A C B, in data proportione minori, quam tripla; patet, hanc proportionem debere esse adeò minorem tri-

pla,

pla, vt tamen sit maior ea, quam habent tria rectangula A C B, minus rectangulo K B C, facto ex composita ex K C, quæ sit excessus sesquialteræ A G, super sesquialteram C B, & ex C B, in C B, ad rectangulum A C B; vt consideranti patet, alioquin C B, non posset diuidi.

## LEM. XLVII. PROP. LXXXIII.

Sit recta linea F G, secta in punctis A, B, & C, vt F A, sit minor A B, sed maior eius tertia parte, & G B, sit dimidia A B, & G C, sit sesquialtera F A, & C B, sit diuisa in M, & A M, bifariã in K. Tria rectangula F A B, minus rectangulo A M C, erunt æqualia tribus rectangulis F A, K B, tribus K M B; & duobus quadratis A K.


QVoniam rectangulum M A K, est æquale duobus quadratis A K, quia M K, & K A, sunt æquales. Ergo communibus additis tribus rectãgulis A K,

B M, duo quadrata A K, cum tribus rectangulis B M, A K, erunt æqualia rectangulo M A K, & tribus rectangulis B M, A K. Sed rectangulum M A K, cum rectangulo B M, A K, facit rectangulum B A K; & duo rectangula B M, A K, sunt æqualia rectangulo B M A. Ergo duo quadrata A K, cum tribus rectangulis B M, A K, erunt æqualia rectangulis B A K, & B M A. Sed rectangulum B A K, est æquale rectangulo B G, A M, quia G B, est dimidia B A, & M A, est dupla A K. Ergo duo quadrata A K, cum tribus rectangulis B M, A K, seu B M K, erunt æqualia rectangulo B M A, & rectan-


gulo G B, M A, quæ duo faciunt vnicum rectangulum G M A. Sed quoniam G C, est sexquialtera F A, & A M, est dupla A K; ergo tribus rectangulis F A K, erit æquale rectangulum G C, A M. Sed rectangulum G C, A M, est æquale rectangulo G M A, & rectãgulo C M A. Ergo ablato rectangulo C M A, tria rectãgula FAK, minus rectangulo C M A, erunt æqualia rectangulo G M A. Sed rectangulo G M A, ostensa sunt, supra, æqualia duo quadrata A K, & triplum rectangulum K M B. Ergo tria rectangula F A K, minus rectangulo C M A, erunt æqualia, duobus quadratis A K, & tribus rectangulis K M B. Et communibus additis tribus rectangulis F A, K B. Ergo tria rectangula F A K, cum tribus rectangulis F A, K B, nempe tria rectangula F A B, minus

rec-

rectangulo C M A; erunt æqualia, tribus rectangulis F A, K B; & tribus rectangulis K M B, & duobus quadratis A K. Quod erat ostendendum.

## LEM. III. PROP. LXXXIV.

**Sit recta linea F G, secta in punctis A, C, B, vt in superiori Lemmate, sed A B, tantùm in K, bifariam. Tria rectangula F A B, minus rectangulo A B C, erunt æqualia, duobus quadratis A K, & tribus rectangulis F A, K B.**

NAM eodem modo, quo supra probabitur tria rectangula F A K, esse æqualia rectangulo G C, A B, nempe rectangulo G B A, & rectangulo C B A. Quo ablato hinc inde; & additis tribus rectãgulis F A,


K B; patebit, tria rectangula F A B, minus rectangulo C B A, æqualia esse, tribus rectangulis F A, K B, & rectangulo G B A, hoc est, (quia tres G B, B K, & K A, sunt æquales;) duobus quadratis A K. Quod erat ostendendum.

SCHO-

# SCHOLIVM.

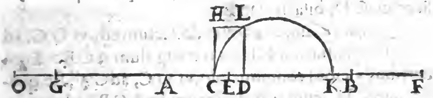
ETiam in duobus superioribus Lemmatibus, patet, lineam F B, diuidi eodem pacto, præterquã quod quando punctum M, cadit in C. Vnde cum rectangulum C B A, sit maius omnibus, quæ habentur, quando punctum M, cadit inter C, B, sequitur etiam, quod tria rectangula F A B, minus rectangulo C B A, sint minora quibuscumque tribus rectangulis F A B, minus rectangulo C M A, quod habeatur ex tali sectione. Vnde si proponatur. Datam rectam F B, sectam in A, vt F A, sit minor A B, sed maior eius tertia parte, & in C, inter A, B, vt facta G A, sexquialtera A B, etiam G C, sit sexquialtera F A; rursùm diuidere ipsam in M, inter C, B, vt secta A M, bifariam in K; tria rectangula F A, K B, cum tribus rectangulis K M B, & cum duobus quadratis A K, sint ad rectangulum F A B, in data proportione minori quam tripla; patet hanc proportionem adeò debere esse minorem tripla, vt tamen sit maior ea, quam habent tria rectangula F A B, minus rectangulo C B A, facto ex A B, in excessum sexquialteræ F A, super dimidiam A B, ad rectangulum F A B. Quod facilè patet consideranti, alioquin non posset diuidi.

LEM-

# LEM. II. PROP. LXXXV.

Datam rectam lineam AB, sectam in C, rursùm diuidere in D, inter C, B, vt diuisa CD, bifariam in E, tria rectangula AC, EB, cum tribus rectangulis EDB, & cum duobus quadratis CE, sint ad rectangulum ACB, in data proportione.

HOC Lemma quinque habet casus. Nam, vel proportio data est maior, vel æqualis, vel minor tripla; & si est minor, vel AC, est æqualis CB, vel maior, vel minor. In omnibus istis casibus, Lem-

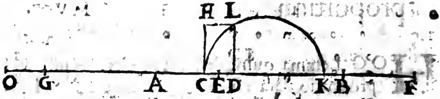



ma recipit aliquas determinationes, quas assignabimus vnicuique. Sit ergo proportio data maior quam tripla, & sit ea, quam habet OC, ad CA. In hoc casu, Lemma recipit duas determinationes, vna, quæ habe-

tur

tur ex Scholio propositionis 77. est, quod A C, sit minor C B; alia, quæ habetur ex Scholio 2. propos. 78. & est, quod facta F G, sexquialtera C B, & ab ipsa ablata F K, sexquialtera A C, proportio data nō sit maior ea, quam habet triplum rectangulum A C B, cum quadrato dimidiæ C K, ad rectangulum A C B.

Quoniam O C, est maior tripla C A, fiat G C, eius tripla, & super C K, fiat semicirculus, & fiat, vt C A, ad O G, sic rectangulum A C B, ad quadratum C H, lineæ erectæ perpendiculariter à puncto C, super A B. Patebit inferius, hanc non esse maiorem dimidia C K.




Si ergo per punctum H, ducatur H L, parallela A B, hæc occurret semicirculo. Occurrat in L, & dimittatur perpendicularis L D. Dico punctum D, esse quæsitum. Secetur C D, bifariam in E.

Quoniam enim, conuertendo, factum est, vt O G, ad C A, sic quadratum C H, ad rectangulum A C B. Ergo & tribus vicibus componendo, vt O C, ad C A, sic quadratum C H, cum tribus rectangulis A C B, ad rectangulum A C B. Sed quadratum C H, est æquale quadrato D L, seù rectangulo C D K. Ergo, & vt O C, ad C A, sic rectangulum C D K, cum tribus rectangulis A C B, ad rectangulum A C B. Sed triplum rectangu-

tangulum A C B, cum rectangulo C D K, ex Schol. 1. propoſit. 78. eſt æquale triplo rectangulo A C, E B, triplo rectangulo E D B, & duobus quadratis C E. Ergo & vt O C, ad C A, ſic triplum rectangulum A C, E B, cum triplo rectangulo E D B, & cum duplo quadrato C E, ad rectangulum A C B.

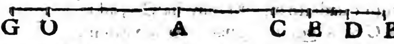
Quòd verò H C, ſit minor dimidia C K, patet ex determinatione, alioquin, eodem progreſſu, probaremus eſſe, vt O C, ad C A, ſic triplum rectangulum A C B, cum quadrato maioris dimidia C K, ad rectangulum A C B. Quod repugnat determinationi.

SI verò proportio data ſit tripla, ex Scholio propoſitionis 77. habemus, quod A C, debet eſſe minor C B, ſed ex Scholio propoſitionis 79 habetur debere eſſe maiorem eius tertia parte. Fiat ergo B F, æqualis A C, & ex F B, auferatur F D, æqualis dimidiæ C F, quæ ex determinatione poterit auferri. Dico punctum D, eſſe quæſitum. Secetur C D, bifariam in E. Quoniam


A C, F B, ſunt æquales; ergo, & earum triplæ erunt æquales. Vnde tres A C, erunt æquales etiam tribus B D, & tribus D F; nempe D C, quæ eſt tripla D F. Et omnibus ductis in C D; tria rectangula A C D, erunt æqualia tribus rectangulis B D C, & quadrato C D. Et ſubduplatis omnibus, tria rectangula A C E, erunt æqualia tribus rectangulis B D E, & dimidio quadrati C D, nempe duobus quadrati C E. Et additis commu-

nibus tribus rectangulis A C, E B; tria rectangula A C E, cum tribus rectangulis A C, E B, (nempe tria rectangula A C B,) erunt æqualia, tribus rectangulis A C, E B, tribus E D B, & duobus quadratis C E. Ergo hæc sunt tripla vnius rectanguli A C B, nempe sunt ad ipsum, vt O C, ad C A. Quod erat faciendum.

SI verò proportio data sit minor tripla, sed A C, sit æqualis C B. Patet ex Scholio propos. 80. debere esse



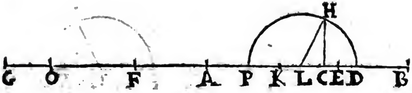

maiorem dupla. Fiat G C, tripla C A. Ergo G O, ex determinatione, erit minor A C, vel C B. Si ergo inter G O, & C B, inueniatur media, erit minor C B. Sit hæc C D. Dico punctum D, esse quæsitum.

Diuidatur C D, bifariam in E. Quoniam rectangulum G O, C B, est æquale quadrato C D. Ergo cõmuni addito rectangulo O C B, duo rectangula G O, C B, & O C B, nempe totum rectangulum G C B, erit æquale rectangulo O C B, & quadrato C D. Sed quoniam G C, est tripla C A, rectangulum G C B, erit æquale triplo rectangulo A C B. Ergo, & triplum rectangulum A C B, erit æquale rectangulo O C B, & quadrato C D. Quo hinc inde ablato, tria rectangula A C B, minus quadrato C D, erunt æqualia rectangulo O C B. Sed vt O C, ad C A, sic rectangulum O C B, ad rectangulum A C B. Ergo, & vt O C, ad C A, sic triplum rectangulum A C B, minus quadrato C D, ad rectangulum A C B. Sed tria rectangula A C B, minus

qua-

quadrato C D, ex propositione 80 sunt æqualia, tribus rectangulis A C, E B, tribus rectangulis E D B, & duobus quadratis E C. Ergo, & vt O C, ad C A, sic tria rectangula A C, E B, cum tribus rectangulis E D B, & cum duobus quadratis C E, ad rectangulum A C B.

SI verò proportio data sit minor tripla, sed A C, sit maior C B. Fiat C G, tripla C A, & fiat C F, sexquialtera A C, & ex ipsa auferatur F K, sexquialtera B C. Determinatio huius casus est, ex Scholio propos. 82. quod sit maior ea, quam habent tria rectangula A C B, minus rectangulo K B C, ad rectangulum A C B.




Inter G O, C B, sit media proportionalis C H, erecta normaliter à puncto C, super A B, & diuisa K C, bifariam in L, & iuncta L H; centro L, interuallo L H, fiat semicirculus P H D, qui, vt patebit, secabit C B, in D. Dico punctum D, esse quæsitum. Secetur C D, bifariam in E.

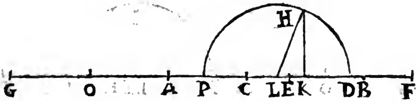
Rectangula enim G O, C B, & P C D, sunt æqualia inter se, quia ambo sunt æqualia eidē quadrato H C, ex constructione. Sed rectangulum P C D, est æquale rectangulo K D C, quia P K, est æqualis C D. Ergo rectangulum K D C, erit æquale rectangulo G O, C B.

Ergo communi addito rectangulo O C B, duo rectangula G O, C B, & O C B, nempe rectangulum G C B, erit æquale rectangulo O C B, & rectangulo K D C. Sed quia G C, est tripla A C, rectangulum G C B, est æquale tribus rectangulis A C B. Ergo tria rectangula A C B, erunt æqualia rectangulis O C B, & K D C. Quo hinc inde ablato, tria rectangula A C B, minus rectangulo K D C, erunt æqualia rectangulo O C B. Sed rectangulum O C B, est ad rectangulum A C B, vt O C, ad C A. Ergo, & vt O C, ad C A, sic triplum rectangulum A C B, minus rectangulo K D C, ad rectangulum A C B. Sed, per proposit. 81. tria rectangula


A C B, minus rectangulo K D C, sunt æqualia tribus rectangulis A C, E B, tribus rectangulis E D B, & duobus quadratis C E. Ergo, & vt O C, ad C A, sic tria rectangula A C, E B, cum tribus rectangulis E D B, & cum duobus quadratis C E, ad rectangulum A C B. Quod erat &c.

Quòd verò semicirculus secet C B, in D, patet ex determinatione, alioquin eodem progressu demonstrabimus esse, vt O C, ad C A, sic triplum rectangulum A C B, minus rectangulo K B C, vel minus maiori eo, ad rectangulum A C B. Quod determinationi aduersatur.

SI tandem proportio data sit minor tripla, sed A C, sit minor C B. In primis, ex Schol. proposit. 79. patet, oportere A C, esse maiorem tertia parte C B. Fiat F C, sexquialtera C B, & auferatur F K, sexquialtera A C. Iam punctum K, cadet inter C, B; nam cum A C, sit maior tertia parte C B; ergo, quorum C B, est tria, & B F, est vnum cum dimidio, A C, est magis, quam

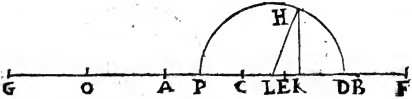



vnum; & eius sexquialtera F K, est maior vno cum dimidio, nempe maior B F. Patet ergo, his præmissis, ex Scholio proposit. 84. oportere proportionem datam maiorem esse ea, quam habent tria rectangula A C B, minus rectangulo K B C, ad rectangulum A C B. Secetur ergo C K, bifariam in L, & inter G O, & C B, sit media proportionalis K H, erecta normaliter super A B, à puncto K, & iuncta L H, centro L, internallo L H, describatur semicirculus P H D, secans K B, in D, (secabit enim, vt patebit.) Dico punctum D, esse quæsitum. Secetur C D, bifariam in E.

Quoniam rectangula G O, C B, & P K D, sunt æqualia, quia ambo æqualia eidem quadrato K H; & rectangulo P K D, est æquale rectangulum C D K. Ergo rectangulum G O, C B, erit æquale rectangulo C D K.

Qua-

Quare, communi addito rectangulo O C B. Ergo duo rectangula G O, C B, & O C B, nempe vnicum rectangulum G C B, seu triplum rectangulum A C B, quia G C, est tripla C A, erit æquale rectangulo O C B, & rectangulo C D K. Quo hinc inde ablato, triplum rectangulum A C B, minus rectangulo C D K, erit æquale rectangulo O C B. Sed rectangulum O C B, est ad




ad rectangulum A C B, vt O C, ad C A. Ergo, & vt O C, ad C A, sic triplum rectangulum A C B, minus rectangulo C D K, hoc est, ex proposit. 83. tria rectangula A C, E B, cum tribus rectangulis E D B, & cum duobus quadratis E C, ad rectangulum A C B. Quod erat faciendum.

Assumptum patet ex determinatione, & ex processu demonstrationis, & etiam ex his, quæ dicta sunt in alijs casibus.

LEM-

# LEM. L. PROP. LXXXVI.

Sit recta linea AB, ſecta in punctis C, & D, vtcumque, & CD, ſit ſecta bifariam in E. Rectangulum ſub compoſita ex DA, AC, in ſexquialteram DB, cum rectangulo ſub compoſita ex DA, & dupla AC, in dimidiã CD, nempe in CE, erit æquale tribus rectangulis AC, EB, tribus rectangulis EDB, & duobus quadratis CE.

NAM rectangulum ſub compoſita ex DA, AC, in ſexquialteram DB, æquatur duobus rectan-


gulis ſub AC, in ſexquialteram DB, & rectangulo ſub CD, in ſexquialteram DB. Rectangulum verò ſub dupla AC, in ſexquialteram DB, æquatur triplo rectangulo AC, DB. Et pariter rectangulum ſub CD, in ſexquialteram DB, æquatur triplo rectangulo EDB.

Ergo

Ergo rectangulum sub composita ex DA, AC, in sexquialteram D B æquatur triplo rectangulo A C, D B, & triplo rectangulo E D B.

Pariter, rectangulum sub composita ex DA, & dupla A C, in C E, æquatur triplo rectangulo A C E, & rectangulo D C E, nempe duplo quadrato C E. Ergo rectangulum sub composita ex D A, A C, in sexquialteram D B, cum rectangulo sub composita ex D A, & dupla A C, in C E, æquatur tribus rectangulis A C, D B, tribus rectangulis E D B, tribus rectangulis A C E, siue A C, E D, & duobus quadratis C E. Sed tria rectangula A C, D B, cum tribus rectangulis A C, E D, faciunt tria rectangula A C, E B. Quare patet propositum.

## PROBL. XXXVII. PROP. LXXXVII

Datam sphæram, cuius diameter sit A B, sectam plano D E F, cui diameter A B, sit perpendicularis, rursùm secare plano G H L, plano D E F, parallelo, vt facto cono, cuius basis D E F, axis H E, axis etiam segmenti intermedij G B F H; segmentum sit ad conum DHF, in data proportione.

Datam

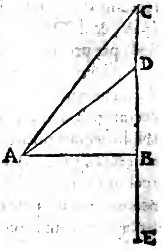
DAta proportio sit, quam habet A B, ad K, & data A B, secta in puncto E, rursùm secetur in H, inter E, B, vt secta E H, bifariam in C, sit, vt A B, ad K, sic triplum rectangulum A E, C B, cum triplo C H B, & cum duobus quadratis C E, ad rectangulum A E B, per propos. 85. & per punctum H, agatur planũ G H L, plano D E F, parallelum, & fiat conus D H F. Dico factum esse, quod proponebatur.

Nam, per ab alijs ostensa, præcipuè à Caualerio lib. 3. Geometr indiuisib. propos. 3 proportio segmenti intermedij G D F L, ad conum D H F, est eadem, cum proportione rectanguli compositæ ex H A, & A E, in sexquialteram B H, vna cũ rectangulo compositæ ex H A, & dupla A E, in E C. Sed, per propos. antecedentem, hæc proportio est eadem cum proportione tripli rectanguli A E, C B, cum triplo rectangulo C H B, & cum duplo quadrato C E, ad rectangulum A E B. Sequitur ergo, quod, vt triplũ rectangulum A E, C B, cum triplo rectangulo C H B, & cum duplo quadrato C E, ad rectangulum A E B, sic sit segmentum intermedium G D F L, ad conum D H F, & A B, ad K. Vnde cum præsens Problema non sit aliud, quam propos 85. sequitur recipere easdem determinationes cum ipsa. Quare &c.

# LEM. LI. PROP. LXXXVIII.

Sint duo triangula rectangula ABD, ABC, quorum angulus rectus, qui ad B. Dico DB, ad DA, hypotenusam minorem, habere minorem proportionem, quam habet BC, ad CA, hypotenusam maiorem.

Quoniam enim quadratum BC, maius est quadrato BD, ergo quadratum AB, ad quadratum BD, habebit maiorem proportionem, quam ad quadratum BC. Et componendo, quadratū AB, cum quadrato BD, nempe quadratum AD, ad quadratum BD, habebit maiorem proportionem, quam quadratum AB, cum quadrato BC, nempe quadratum AC, ad quadratum CB. Quare, & linea AD, ad lineam DB, habebit maiorem proportionem, quam AC, ad CB. Et conuertendo BD, ad DA, habebit minorem proportionem, quam BC, ad CA.




SCHO-

# SCHOLIVM.

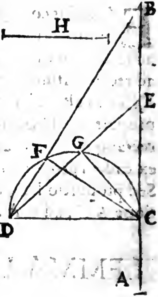
EX dictis colligitur, quod si producatur C B, in E, minor erit proportio rectanguli sub E C, in D B, ad rectangulum D A B, proportione rectanguli E C B, ad rectangulum C A B. Nam, proportio rectanguli sub E C, in D B, ad rectangulum D A B, componitur ex proportione C E, ad A B, & B D, ad D A; & proportio rectanguli E C B, ad rectangulum C A B, componitur ex eadem proportione E C, ad A B, & B C, ad C A. Sed proportio B D, ad D A, ostensa est minor proportione B C, ad C A. Quare patet propositum.

## LEMMA LII. PROP. LXXXIX.

Data recta linea A B, & data D C, ei perpendiculari, ducere à puncto D, D E, occurrentem B C, inter B, C, vt rectangulum sub B A, in E C, sit ad rectangulum E D C, in data proportione.

HOC Lemma est determinatum, & determinatio est, quod ducta B D, proportio data, sit minor ea, quam habet rectangulum A B C, ad rectangulum B D C. Quæ determinatio patet ex superiori Scholio.

Sit ergo proportio data, quam habet H, ad D C, & super D C, fiat semicirculus ad partes B C, secans B D, in puncto F, & iungatur F C; deinde fiat vt B A, ad H, sic D C, ad aliam, quæ infra ostendetur minor C F; quæ aptetur à puncto C, & sit C G, & per puncta D, G, ducatur D G E, occurrens B C, in E. Dico factum esse, quod imperebatur.




Quoniam enim proportio D C, ad H, componitur ex proportione D C, ad A B, & A B, ad H. Sed vt B A, ad H, sic facta est D C, ad C G; & propter similitudinem triangulorum D C G, & D E C, vt D C, ad C G, sic est D E, ad E C. Ergo proportio D C, ad H, componetur quoque ex proportionibus D C, ad A B, & D E, ad E C. Sed istæ duæ rationes componunt quoque rationem rectanguli E D C, ad rectangulum sub A B, in C E. Ergo, & vt D C, ad H, sic rectangulum E D C, ad rectangulum sub A B, in C E. Quare, & conuertendo, vt H, ad D C, sic rectangulum sub B A, in C E, ad rectangulum E D C. Quod erat faciendum.

Quòd verò C G, minor sit C F; patet, quia si esset æqualis, vel maior, eodem discursu probaretur esse H, ad D C, vel in æquali, vel in maiori proportione rectanguli A B C, ad rectangulum B D C. Quod est contra propositam determinationem.

PRO-

# PROBL. XXXVIII. PROP. XC.

## Datis iisdem, quæ in antecedenti Problemate, facere eadem, quæ ibidem, vt superficies sphærica segmenti G D F L, sit ad superficiem conicam coni HDF, in data proportione.

Etiam hoc Problema est determinatum eadem determinatione, qua determinatum est Lemma antecedens, nempe, est necesse, quod proportio data sit minor ea, quam habet rectangulum A B E, ad rectangulum B D E, prius ducta B D. Sit proportio data, quam habet A B, ad K, & datis duabus rectis lineis A B, & D E, sibi inuicem perpendicularibus, ducatur à puncto D, linea D H, occurrens E B, inter E, B, per antecedens Lemma, vt sit sicut A B, ad K, sic rectangulum sub A B, in H E, ad rectangulum H D E, & per punctum H, agatur planũ

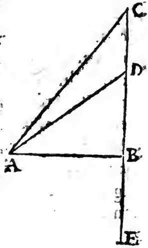

GHL,

GHL, & fiat conus DHF. Dico factum esse, quod imperebatur. Nam, vt rectangulum sub A *B*, in EH, ad rectangulum HDE, seù vt A *B*, ad K, sic superficies sphærica segmenti GDFL, ad superficiem conicam coni DHF, vt elicitur ex Archimede lib. 1. de sphæra, & Cylindro proposit. 40. & 41. Quod erat faciendum.

Quod verò determinatio sit ea, quæ assignata est; patet, quia præsens Problema, non est aliud, quam antecedens Lemma.

# LEMMA LIII. PROP. XCI.

## Datis iisdem, quæ in Proposit. 88. Dico, quod BD, ad DA, cum AB, habebit minorem proportionem, quam BC, ad CA, cum AB.




NAM, cum probatum sit *B*D, ad DA, habere minorem proportionem proportione *B*C, ad C A; & pariter, cùm minor BD, ad BA, habeat minorem proportionem, quam maior C*B*, ad BA. Ergo DB, ad vtrasque simul DA, AB, habebit minorem proportionem, quam

quam C B, ad vtrasque simul C A, A B. Quod erat ostendendum.

## SCHOLIVM.

ETiam ex Lemmate præsenti elicitur, rectangulum sub E C, in D B, ad rectangulum compositæ ex D A, A B, in A B, nempe ad rectangulum D A B, cum quadrato A B, habere minorem proportionem, quam rectangulum E C B, ad rectangulum C A B, cum quadrato A B. Etenim eodem modo, quo factum est supra, discurretur, & patebit propositum.

## LEM. LIV. PROP. XCII.

Data hypotenusa trianguli rectanguli, & data proportione vnius lateris ad aliud latus simul cum hypotenusa, inuenire triangulum.

DAta hypotenusa sit A B, super quam fiat semicirculus, & data ratio sit, quam habet H, ad A B, quam patet oportere esse minoris inæqualitatis. Fiat ergo, vt A B, ad H, sic H, ad B C, positam in directum ipsi A D, cui A B, fiat æqualis B D; deinde fiat, vt AC, ad C D, ita A B, ad B E; & à puncto A, aptetur A F, æqualis A E, & ducatur F B. Dico triangulum A F B, esse

Data proportio sit, quam habet A B, ad K, & data A B, secta in puncto E, rursùm secetur in H, inter E, B, vt secta E H, bifariam in C, sit, vt A B, ad K, sic triplum rectangulum A E, C B, cum triplo C H B, & cum duobus quadratis C E, ad rectangulum A E B, per propos. 85. & per punctum H, agatur planũ G H L, plano D E F, parallelum, & fiat conus D H F. Dico factum esse, quod proponebatur.

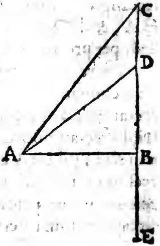
Nam, per ab alijs ostensa, præcipuè à Caualerio lib. 3. Geometr indiuisib. propos. 3 proportio segmenti intermedij G D F L, ad conum D H F, est eadem, cum proportione rectanguli compositæ ex H A, & A E, in sexquialteram B H, vna cũ rectangulo compositæ ex H A, & dupla A E, in E C. Sed, per propos. antecedentem, hæc proportio est eadem cum proportione tripli rectanguli A E, C B, cum


triplo rectangulo C H B, & cum duplo quadrato C E, ad rectangulum A E B. Sequitur ergo, quod, vt triplũ rectangulum A E, C B, cum triplo rectangulo C H B, & cum duplo quadrato C E, ad rectangulum A E B, sic sit segmentum intermedium G D F L, ad conum D H F, & A B, ad K. Vnde cum præsens Problema non sit aliud, quam propos 85. sequitur recipere easdem determinationes cum ipsa. Quare &c.

# LEM. LI. PROP. LXXXVIII.

Sint duo triangula rectangula ABD, ABC, quorum angulus rectus, qui ad B. Dico DB, ad DA, hypotenusam minorem, habere minorem proportionem, quam habet BC, ad CA, hypotenusam maiorem.

Quoniam enim quadratum BC, maius est quadrato BD, ergo quadratum AB, ad quadratum BD, habebit maiorem proportionem, quam ad quadratum BC. Et componendo, quadratũ AB, cum quadrato BD, nempe quadratum AD, ad quadratum BD, habebit maiorem proportionem, quam quadratum AB, cum quadrato BC, nempe quadratum AC, ad quadratum CB. Quare, & linea AD, ad lineam DB, habebit maiorem proportionem, quam AC, ad CB. Et conuertendo BD, ad DA, habebit minorem proportionem, quam BC, ad CA.




SCHO-

# SCHOLIVM.

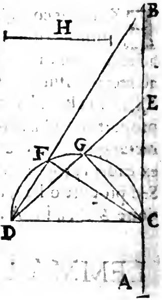
EX dictis colligitur, quod si producatur C B, in E, minor erit proportio rectanguli sub E C, in D B, ad rectangulum D A B, proportione rectanguli E C B, ad rectangulum C A B. Nam, proportio rectanguli sub E C, in D B, ad rectangulum D A B, componitur ex proportione C B, ad A B, & B D, ad D A; & proportio rectanguli E C B, ad rectangulum C A B, componitur ex eadem proportione E C, ad A B, & B C, ad C A. Sed proportio B D, ad D A, ostensa est minor proportione B C, ad C A. Quare patet propositum.

## LEMMA LII. PROP. LXXXIX.

Data recta linea A B, & data D C, ei perpendiculari, ducere à puncto D, D E, occurrentem B C, inter B, C, vt rectangulum sub B A, in E C, sit ad rectangulum E D C, in data proportione.

HOC Lemma est determinatum, & determinatio est, quod ducta B D, proportio data, sit minor ea, quam habet rectangulum A B C, ad rectangulum B D C. Quæ determinatio patet ex superiori Scholio.

Sit ergo proportio data, quam habet H, ad D C, & super D C, fiat semicirculus ad partes B C, secans B D, in puncto F, & iungatur F C; deinde fiat vt B A, ad H, sic D C, ad aliam, quæ infra ostendetur minor C F; quæ aptetur à puncto C, & sit C G, & per puncta D, G, ducatur D G E, occurrens B C, in E. Dico factum esse, quod imperebatur.




Quoniam enim proportio D C, ad H, componitur ex proportione D C, ad A B, & A B, ad H. Sed vt B A, ad H, sic facta est D C, ad C G; & propter similitudinem triágulorum DCG, & D E C, vt D C, ad C G, sic est D E, ad E C. Ergo proportio D C, ad H, componetur quoque ex proportionibus D C, ad A B, & D E, ad E C. Sed istæ duæ rationes componunt quoque rationem rectanguli E D C, ad rectangulum sub A B, in C E. Ergo, & vt D C, ad H, sic rectangulum E D C, ad rectangulum sub A B, in C E. Quare, & conuertendo, vt H, ad D C, sic rectangulum sub B A, in C E, ad rectangulum E D C. Quod erat faciendum.

Quòd verò C G, minor sit C F; patet, quia si esset æqualis, vel maior, eodem discursu probaretur esse H, ad D C, vel in æquali, vel in maiori proportione rectanguli A B C, ad rectangulum B D C. Quod est contra propositam determinationem.

PRO-

# PROBL. XXXVIII. PROP. XC.

## Datis iisdem, quæ in antecedenti Problemate, facere eadem, quæ ibidem, vt superficies sphærica segmenti G D F L, sit ad superficiem conicam coni HDF, in data proportione.

ETiam hoc Problema est determinatum eadem determinatione, qua determinatum est Lemma antecedens, nempe est necesse, quod proportio data sit minor ea, quam habet rectangulum A B E, ad rectangulum B D E, prius ducta B D. Sit proportio data, quam habet A B, ad K, & datis duabus rectis lineis A B, & D E, sibi inuicem perpendicularibus, ducatur à puncto D, linea D H, occurrens E B, inter E, B, per antecedens Lemma, vt sit sicut A B, ad K, sic rectangulum sub A B, in H E, ad rectangulum H D E, & per punctum H, agatur planũ

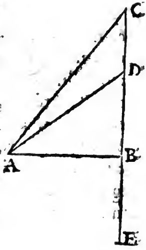

GHL,

GHL, & fiat conus DHF. Dico factum esse, quod imperebatur. Nam, vt rectangulum sub AB, in EH, ad rectangulum HDE, seù vt AB, ad K, sic superficies sphærica segmenti GDFL, ad superficiem conicam coni DHF, vt elicitur ex Archimede lib. 1. de sphæra, & Cylindro proposit. 40. & 41. Quod erat faciendum.

Quod verò determinatio sit ea, quæ assignata est; patet, quia præsens Problema, non est aliud, quam antecedens Lemma.

## LEMMA LIII. PROP. XCI.

Datis ijsdem, quæ in Proposit. 88. Dico, quod BD, ad DA, cum AB, habebit minorem proportionem, quam BC, ad CA, cum AB.




NAM, cum probatum sit BD, ad DA, habere minorem proportionem proportione BC, ad CA; & pariter, cùm minor BD, ad BA, habeat minorem proportionem, quam maior CB, ad BA. Ergo DB, ad vtrasque simul DA, AB, habebit minorem proportionem, quam

quam C B, ad vtrasque simul C A, A B. Quod erat ostendendum.

## SCHOLIVM.

ETiam ex Lemmate præsenti elicitur, rectangulum sub E C, in D B, ad rectangulum compositæ ex D A, A B, in A B, nempe ad rectangulum D A B, cum quadrato A B, habere minorem proportionem, quam rectangulum E C B, ad rectangulum C A B, cum quadrato A B. Etenim eodem modo, quo factum est supra, discurretur, & patebit propositum.

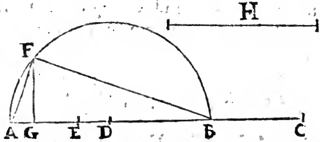
## LEM. LIV. PROP. XCII.

Data hypotenusa trianguli rectanguli, & data proportione vnius lateris ad aliud latus simul cum hypotenusa, inuenire triangulum.

DAta hypotenusa sit A B, super quam fiat semicirculus, & data ratio sit, quam habet H, ad A B, quam patet oportere esse minoris inæqualitatis. Fiat ergo, vt A B, ad H, sic H, ad B C, positam in directum ipsi A D, cui A B, fiat æqualis B D; deinde fiat, vt AC, ad C D, ita A B, ad B E; & à puncto *A*, aptetur A F, æqualis A E, & ducatur F B. Dico triangulum *A* F B, esse

esse quæsitum, & in eo esse, vt H, ad A B, sic B F, ad compositam ex *B* A, A F.

Quoniam enim est vt *A* B, ad *B* E, sic (sumpta communi altitudine A *B*,) quadratum A *B*, ad rectangulum A *B* E, & vt quadratum A *B*, ad rectangulum A *B* E, sic duo quadrato *A B*, ad duo rectangula A *B* E.




Ergo, & vt A *B*, ad *B* E, sic erunt duo quadrata A *B*, ad duo rectangula A *B* E Sed pariter vt A *B*, ad *B* E, sic (sũpta cõmuni altitudine A E,) est rectangulũ B A E, ad rectangulũ A E B, & duo rectangula B A E, ad duo A E B. Ergo erit vt A B, ad B E, sic tam duo quadrata A B, ad duo rectangula *A* B E, quam duo rectangula B *A* E, ad duo rectangula *A* E B. Ergo erit, vt vnum antecedentium ad vnum consequentium, vel vt A B, ad B E, sic ambo antecedentia ad ambo consequentia, nempe duo quadrata A B, cum duobus rectangulis B A E, ad duo rectangula A B E, cum duobus rectangulis A E B. Sed A *B*, ad B E, facta est, vt A C, ad C D. Ergo, & vt A C, ad C D, sic duo quadrata A B, cum duobus rectangulis B *A* E, ad duo rectangula *A* B E, cum duobus rectangulis *A* E B. Et ad consequentium dimidia.

Ergo

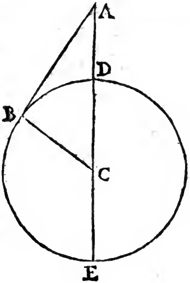
Ergo, vt A C, ad C B, ſic duo quadrata A B, cum duobus rectangulis B A E, ad rectangulum A B E, cum rectangulo A E B. Et diuidendo, vt A B, ad B C, ſic exceſſus duorum quadratorum A B, cum duobus rectangulis B A E, ſuper rectangulum A B E, & ſuper rectangulum A E B, ad rectangulum A B E, cum rectangulo A E B, ſimul. Sed talis exceſſus, eſt æqualis vno quadrato *A* B, vno quadrato A E, & duobus rectangulis B *A* E; quia vnicum quadratum A *B*, excedit rectangula A *B* E, & *A* E B, ipſo quadrato A E. Ergo, & vt A *B*, ad *B* C, ſic quadratum A *B*, cum quadrato A E, ſeù cum quadrato A F, quia A E, & A F, factæ ſunt æquales, & cum duobus rectangglis B A E, ſeù B A F, ad rectangulum A *B* E, cum rectangulo A E B. Sed quadratum A B, cum quadrato A F, & cum duobus rectangulis B A F, eſt æquale quadrato compoſitæ ex B A, & A F. Et pariter, rectangulum A *B* E, cum rectangulo A E *B*, eſt æquale exceſſui quadrati A B, ſuper quadratum A E, ſeù A F, cui etiam exceſſui, eſt æquale quadratum F B. Ergo, & vt A *B*, ad *B* C, ſeù vt quadratum lineæ A *B*, ad quadratum lineæ H, ſic quadratum compoſitæ ex *B* A, A F, ad quadratum lineæ F *B*. Quare conuertendo, vt quadratum H, ad quadratum A *B*, ſic quadratum F *B*, ad quadratum compoſitæ ex F A, & A *B*. Quare, & vt H, ad A B, ſic F B, ad compoſitam ex F A, A B. Quod erat faciendum.

# SCHOLIVM.

EX hoc Lemmate poteſt etiam ſolui ſequens Problema; nempe triangulum rectangulum conſtituere, vt totus perimeter triãguli, ſit ad vnum duorum laterũ, in data proportione; vt conſideranti patet. Sed hoc Lemma poteſt facilius ſolui præmiſſo Lemmate ſequenti.

## LEM. LV. PROP. XCIII.

Quodlibet latus trianguli rectanguli, eſt medium proportionale, inter compoſitam ex hypotenuſa, & ex alio latere, & inter differentiam eorundem.



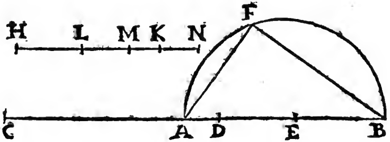

SIT triangulum rectangulum A B C, cuius angulus rectus, qui ad B. Dico, quod v. g. A B, erit media proportionalis inter compoſitam ex A C, C B, & inter differentiam earundem AC, CB. Centro C, interuallo C B, deſcribatur circulus ſecans C A, in D, & A C, producta ei occur-

currat in E. Quoniam ergo A B, tangit circulum, quia angulus A B C, est rectus; ergo quadratum A B, est æquale rectangulo E A D. Sed A D, est differentia inter A C, C D, seu inter A C, C B; & A E, est composita ex A C, C E, hoc est C B. Quare patet propositum.

# LEMMA LVI. PROP. XCIV.

## Datis ijsdem facere eadem, quæ in Propositione 102.

PRæmisso hoc Lemmate, soluetur antecedens facilius. Data ratio sit, quam habet K L, ad K H; & fiat vt H K, ad K L, sic K L, ad K M, & M K, producatur in N, vt M N, sit dupla M K. Pariter B A, producatur in C, vt C B, sit dupla B A, & fiat vt H N, ad

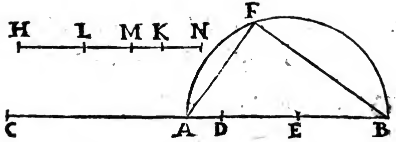



N M, sic C B, ad B D; & D B, secetur bifariam in E; & super A B, facto semicirculo, in ipso à puncto A, aptetur A F, æqualis A E, & iungatur F B. Dico trian-

 gu-

gulum A F B, esse quæsitum, & in ipso esse, vt H K, ad K L, sic B A, cum A F, ad F B.

Quoniam enim factum est, vt H N, ad N M, sic C B, nempe dupla A B, ad B D. Ergo & diuidendo, vt H M, ad M N, sic B A, cum A D, ad D B. Et ad consequentium dimidia. Ergo, vt H M, ad M K, sic B A, cum A D, ad D E. Et componendo, vt H K, ad K M,



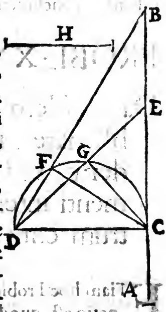

sic A B, cum A E, ad D E, seu ad E B. Sed A E, facta est æqualis A F. Ergo B E, erit differentia inter A B, & A F. Quare erit, vt H K, ad K M, sic B A, cum A F, ad E B, differentiam inter hypotenusam, & latus. Sed H K, ad K L, est in subduplicata ratione H K, ad K M, quia tres H K, K L, & K M, sunt continue proportionales; & pariter, ex Lemmate antecedenti, B A, cum A F, ad F B, est in subduplicata ratione B A, cum A F, ad E B. Ergo, & vt H K, ad K L, sic B A, cum A F, ad F B. Et conuertendo, vt K L, ad K H, sic F B, ad B A, cum A F. Quod &c.

LEM-

# LEM· LVII· PROP· XCV·

Datis iisdem, quæ in propos. 89. facere eadem, quæ ibidem, adeò vt rectangulum sub AB, in CE, ad rectangulum EDC, simul cum quadrato DC, sit in data proportione.

HOC etiam Lemma est determinatum, & determinatio est, quod proportio data sit minor ea, quam habet rectangulum ABC, ad rectangulum BDC, cum quadrato DC, vt constat ex Scholio proposit. 91. Data ergo proportio sit, quam habet H, ad DC. Data ergo DC, hypotenusa trianguli rectanguli, & data proportione, quam habet AB, ad H, inueniatur triangulum rectangulũ DCG, vt sit, sicut AB, ad H, sic composita ex CD, DG, ad GC, quæ inferius ostendetur minor FC, & DG, producatur vsque ad E. Dico factum esse, quod imperebatur.




Etenim, vt dictum est supra, proportio DC, ad H, com-

componitur ex proportione D C, ad A B, & A B, ad H. Sed vt A B, ad H, sic composita ex C D, D G, ad G C; & vt composita ex C D, D G, ad G C, sic propter similitudinem triangulorum C G D, & E D C, composita ex E D, & D C, ad C E. Ergo proportio quoque D C, ad H, componetur ex proportione D C, ad A B, & ex proportione compositæ ex E D, D C, ad C E. Sed illæ duæ rationes componunt quoque rationem rectanguli E D C, cum quadrato D C, ad rectangulum A B, C E. Ergo, & conuertendo, vt H, ad D C, sic rectangulum sub A B, in C E, ad rectangulum E D C, cum quadrato D C. Quod erat faciendum.

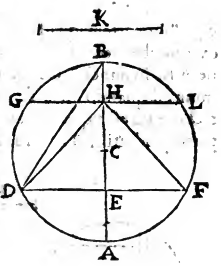
Quòd verò C G, sit minor C F, patet; alioquin, eodem discursu, concluderetur contra determinationem.

## PROBL. XXXIX. PROP. XCVI.

Datis ijsdem, quæ in superiori Problemate, facere eadem, quæ ibidem, vt superficies sphærica segmenti intermedij, sit ad perimetrum coni, in data proportione.

Etiam hoc Problema est determinatum, & determinatio est, quod proportio data, sit minor ea, quam habet rectangulum A B E, ad rectangulum B D E, cum qua-

quadrato D E. Quæ determinatio patet ex superioribus, sicut etiam constructio Problematis. Nam proportio superficiei sphæricæ segmenti intermedij, G D F N, ad perimetrum coni D H F, est eadem cum proportione rectãguli A B, H E, ad rectangulũ H D E, cum quadrato D E; vt deducitur ex Archimede supra citato.

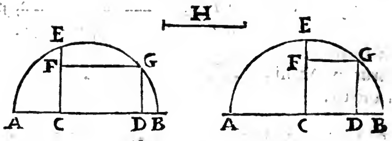



# LEMMA LVIII. PROP. XCVII.

Datam rectam lineam A B, sectam in puncto C, rursùm diuidere in D, inter C, B, vt rectangulum A C B, sit ad rectangulum A D B, in data proportione.

Data proportio sit, quam habet A B, ad H. Linea autem A C, respectu lineæ C B, se habet tali pacto, vt sit, vel ea minor, vt in prima figura, vel nõ minor, vt in secunda. In primis patet, semper oportere, proportionem A B, ad H, esse talis conditionis, vt non

non sit minor ea, quam habet rectangulum A C B, ad quartam partem quadrati A B. Res est euidens, quia ex omnibus rectangulis, quæ possunt haberi ex sectione A B, in puncto, factis sub duobus segmentis, maximum est quando linea secatur bifariam, & tunc tale rectangulũ est æquale quadrato dimidiæ, nempe quartæ parti quadrati A *B*. Tunc patet, quod si A C, sit minor




C B, Lemma potest solui in quacumque proportione vniuersaliter, præter quam quod in qualibet proportione defectus; quia in proportione defectus, Lemma est coarctandum, vt non sit minor ea, quam habet rectangulum A C B, ad quartam partem quadrati A B. Si verò A C, non sit minor C B; tunc Lemma nequit solui nisi in proportione maioris inæqualitatis, quia semper rectangulum A C B, est maius quocumque rectangulo A D B, vt consideranti patet. His præmissis.

Super A *B*, fiat semicirculus, & à puncto C, erigatur perpendicularis C E; tunc fiat, vt A B, ad H, sic quadratum E C, ad quadratum lineæ, quam ex determinationibus supra expositis; patet nunquam esse maio-

maiorem dimidia A B; quare si in C E, sumatur ei æqualis, siue hæc sit semper minor E C, vt in secundo casu, siue sit minor, siue æqualis, siue maior, vt in prima figura, ( quamuis ponamus in schemate minorem, ) quæ sit C F, & per punctum F, ducamus F G, parallelam A B, hæc semper occurret circumferentiæ. Ducatur ergo, & occurrat in G, & à puncto G, demittatur perpendicularis D G. Dico punctum D, esse quæsitum.

Res est euidens, quia cum factum sit, vt A B, ad H, sic quadratum E C, ad quadratum C F, seù ad quadratum D G, ei æquale, & quadratis E C, G D, sint æqualia rectangula A C B, & A D B, alterum alteri. Ergo, & vt A B, ad H, sic rectangulum A C B, ad rectangulum A D B. Quod erat faciendum.

# SCHOLIVM.

SI vice semicirculorũ constituerentur super A B, semiellipses, nihilominus eodem modo fieret propositum; quia quamuis in ellipsi, quadrato v. g. C E, non sit æquale rectangulum A C B, attamen; ex propos. 21. primi Conic. est, vt quadratum C E, ad quadratum D G, sic rectangulum A C B, ad rectangulum A D B.

Pariter si loco semicirculorũ, vel semiellipsium vtamur duabus quibuscunque parabolis, nihilominus faciliter habebimus propositum, supponendo A B, esse vnam ex ordinatim applicatis ad axem, vel diametrũ Nam, si per punctum C, ducatur C E, parallela axi, vel diametro, & fiat vt A B, ad H, sic E C, ad C F, & fiant

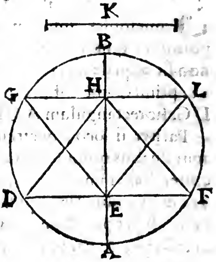
 reliqua,

reliqua, vt supra; punctum D, erit quæsitum. Nam, vt alij ostendunt, sed præcipue Caualerius lib 4. Geometr. indiuisib. propos. 3. vt EC, ad GD, sic est rectangulum ACB, ad rectangulum ADB.

## PROBL. XL. PROP. XCVIII.

Datis ijsdem, quæ in superioribus Problematibus; facere eadem, quæ ibidem, vt factis duobus conis, nẽpe DHF, super basim datam, & GEL, super basim non datam, quorum communis axis sit EH, sint in data proportione.

QVoniam enim duorum conorum est eadem altitudo, ergo sunt inter se, vt bases. Quare conus DHF, erit ad conũ GEL, vt basis DEF, ad basim GHL, seù vt quadratũ DF, ad quadratũ GH, seù vt rectãgulũ AEB, ad rectãgulũ AHB. Quare cõstat præsens Problema reduci ad antece-



tecedens Lemma, & habebimus intentum, vt vnusquisque facile potest cognoscere.

# SCHOLIVM.

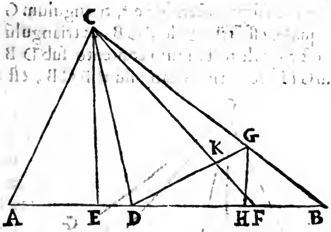
HIC soluenda venirent Problemata circa superficies horum conorum, sed ipsas reseruamus ad aliud tempus, sicut etiam hæc, nempe. Datam sphæram, vt in superioribus Problematibus, sectam plano D E F, rursùm secare plano G H L, plano D E F, parallelo, vt facto cono G E L, super basim non datam; vel segmentum intermedium G D F L, ad conum G E L; vel superficies segmenti ad superficiem, vel ad perimetrum coni, sit in data proportione.
Sed hæc, vt diximus, reseruamus pro alio Opere, quod, Deo fauente, imprimetur.

# LEMMA LIX. PROP. IC.

Esto triangulum A C B, cuius angulus C, secetur bifariam à linea C D, & latus A C, sit minus latere C B, vnde, & A D, sit minor D B, cui A D, sit facta æqualis D F, & sit ducta C F. Si super basim D B, fiat triangulum æquale triangulo F C B, perpendiculum ipsius ductum à vertice G, semper minus erit D F, seù D A.

QVoniam C B, maior supponitur C A, fiat ipsi C A, æqualis C G, & ducatur D G. Quoniam trianguli A C D, duo latera A C, C D, sunt æqualia duobus lateribus D C, C G, trianguli D C G, alterum alteri, & angulus A C D, est æqualis angulo D C G; ergo basis A D, erit æqualis basi D G, & triangula erunt æqualia. Sed etiam triangulo A C D, est æquale triangulum D C F. Ergo triangula D C F & D C G, erunt æqualia. Quare addito communi triangulo A C D, totum triangulum A C F, erit æquale trapezio A C G D. Quare, & reliquum F C B, erit æquale reliquo D G B.

Sed




Sed in hoc, dimiſſo perpendiculo G H, patet ipſum minus eſſe hypothenuſa D G, hoc eſt ipſa D A, ſeù D F. Quare patet propoſitum.

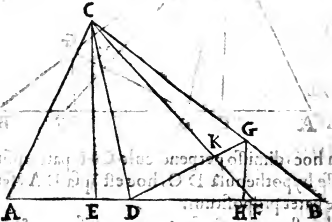
Vel poſtquam facta ſunt omnia, vt ſupra, & concluſum eſt triangulum D C G æquale eſſe triangulo D C F, ſi auferatur commune triangulum D C K & addatur commune trapezium F K G B, nihilominus facilius concludetur propoſitum. Res eſt clara.

## LEMMA LX. PROP. C.

Sint facta, & oſtenſa eadem, quæ in ſuperiori Lemmate, & ſit ductum C E, perpendiculum trianguli A C B. Erit, vt D B, ad B F, ſic C E, ad G H.

Quo-

QVoniam supra ostensum est, triangulum G D B, æquale, esse triangulo F C B, & triangulũ B G D, est æquale rectangulo contento sub D B, in dimidiam G H, & pariter triangulum F C B, est æquale




rectangulo contento sub F B, in dimidiam C E. Ergo, & hæc rectangula, & illorum dupla erunt æqualia, nempe rectangulum sub D B, in H G, erit æquale rectangulo sub F B, in C E. Quare, vt D B, ad F B, sic C E, ad G H. Quod erat ostendendum.

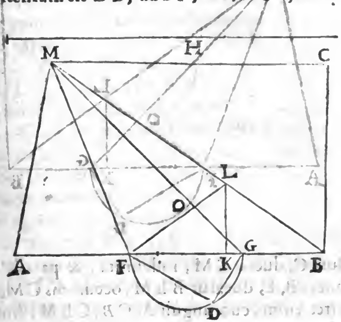
## LEM. LXI. PROP. CI.

### Data base, perpendiculo, & proportione laterum trianguli inuenire triangulum.

SI proportio data sit æqualitatis, res est adeò facilis, vt pudeat in hoc verba profundere. Si autem

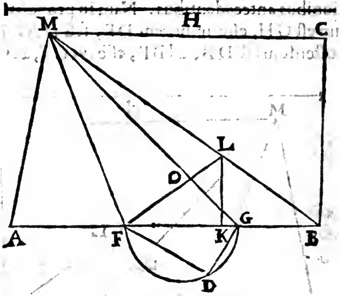
sit

sit inæqualitatis; tunc Lemma debet determinari. Si ergo est defectus, vt in præsenti supponimus, determinatio talis est: Oportet proportionem datam, & perpendiculum talis esse conditionis, vt secta base in data proportione, & facto vt maius segmentum ad excessum eius supra minus, sic perpendiculum ad aliam, hæc sit minor minori segmento. Determinatio patet ex propositionibus antecedentibus. Nam in proposit. 99. ostensum est G H, esse minorem D F, seù D A. In 100. verò ostensum est D B, ad B F, esse, vt C E, ad G H.




Sit ergo data basis A B, & data proportio sit, quam habet A B, ad H, perpendiculum verò datum sit B C, ereotum normaliter super A B, à puncto B. Diuidatur A B, in F, vt sit, sicut A B, ad H, sic A F, ad F B, fiatque

que F G, æqualis A F, & ſuper F G, fiat ſemicirculus, fiatque vt F B, ad B G, ſic C B, ad aliam. Patet ex determinatione, hanc eſſe minorem F G. Ergo poterit aptari in ſemicirculo, cuius diameter F G; aptetur, & ſit F D, fiatque ei æqualis F K, atque à puncto K, erigatur K L, normalis ſuper A B, quæ ſit æqualis D G, & per




punctum C, ducta C M, indefinita, & parallela A B, per puncta B, L, ducatur B L M, occurrens C M, in M, (occurret enim, cum anguli M C B, C B M, ſint duobus rectis minores;) tunc ducatur M A. Dico triangulum A M B, eſſe quæſitum. Nam eſt ſuper baſi A B, & ſuum perpendiculum C B. Quòd verò ſit, vt A B, ad H, ſic A M, ad M B, ſic patebit. Ducantur M F, M G, & F L. Patet duo triangula A M F, F M G, eſſe æqualia,

pro-

propter bases A F, F G, æquales, & propter eandem altitudinem. Cùm autem factum sit, vt F B, ad B G, sic C B, ad D G, seù ad K L; ergo rectangulum sub F B, in K L erit æquale rectangulo facto sub C B, in B G. Ergo & illorum dimidia, nempe triangula F L B, G M B, erunt æqualia. Quare communi ablato trapezio L O G B, atque addito communi triangulo F M O, triangulum F M L, erit æquale triangulo F M G, seù A M F. Cùm autem super eandem basim M F, sint duo triangula M L F, & M G F, æqualia, ducta L G, erit parallela M F. Ergo angulus F L G, erit æqualis alterno M F L, & angulus externus A F M, erit æqualis interno, & opposito F G L. Verùm cùm duæ F K, K L, sint æquales duabus F D, D G, & anguli F K L, F D G, ab ipsis contenti sint æquales, quia recti. Ergo, & F L, erit æqualis F G, seù F A. Cùm autem in triangulo L F G, duo latera F L, F G sint æqualia. Ergo anguli quoque ad basim, nempe F L G, F G L, erunt æquales. Sed angulo F L G, est æqualis ei alternus M F L, & angulo F G L, ostensus est æqualis ei externus, & oppositus A F M. Ergo habemus duo triangula M F A, & M F L, quæ habent duo latera æqualia duobus lateribus, alterum alteri, & angulus A F M, cõtentus sub æqualibus lateribus vnius, est æqualis angulo contento sub æqualibus lateribus alterius. Ergo basis A M, erit æqualis basi M L, triangulum erit æquale triangulo, & angulus A M F, erit æqualis angulo F M L. Ergo, vt A F, ad F B, seù vt A B, ad H, sic A M, ad M B. Quod erat faciendum.

Si proportio data sit excessus, soluetur Lemma facilitér, faciendo, vt prius ex alia parte, & conuertendo.

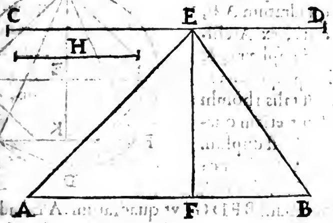
## PROBL. XLII. PROP. CII.

Data AB, magnitudine, & positione, & data CD, ei parallela, tantùm positione; inuenire in CD, punctum E, vt iunctis AE, EB, & ducta perpendiculari EF, & reuolutis triangulis EAF, FEB, circa AB, vt fiant coni; superficies conica coni ex triãgulo AEF, ad superficiem conicam coni ex triangulo FEB, sit in data proportione.

DAta ratio sit, quam habet AB, ad H. Problema faciliter soluetur ex antecedentibus Lemmatibus. Nam cum duæ AB, & CD, sint datæ positione, dabitur etiam EF, magnitudine, per Propos. 32. datorum. Data ergo basi AB, & dato perpendiculo EF, & data ratione laterum, quę sit proportio data AB, ad H,

inue-

inueniatur triangulum A E B, hoc est duo triangula A F E, B F E, vt sit sicut A B, ad H, sic A E, ad E B: Dico, quod si ex ipsis reuolutis circa A B, fiant coni, quod erunt quęsiti. Nam est vt A B, ad H, sic A E, ad E B, nempe rectangulum A E F, ad rectangulum B E F, nempe, ex

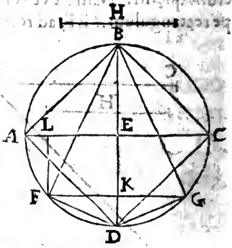



Archimede sæpe citato, superficies conica coni orti ex reuolutione trianguli A F E, circa A F, ad superficiem conicam coni orti ex reuolutione trianguli E F *B*, circa F B. Quod erat faciendum.

# LEMMA LXII. PROP. CIII.

Sphæra ad rhombum sibi inscriptum, est vt quadratum inscriptibile in circulo maximo, ad quadratum radij circuli, qui est basis rhombi.

SIT in sphæra, cuius centrum E, rhombus inscriptus B F D G. Dico esse &c. Fiat rhombus BADC, cuius latera sint chordæ quadratis. Quod autē sphæra ad rhombum BADC, sit vt quadratū B A, ad quadratum A E, patet; quia, ex Archimede 1. de sphæra, & Cylindro proposit. 32. sphæra est talis rhombi dupla, sicut etiam quadratum B A, est duplum quadrati A E. Tunc, quoniā rhōbus BADC, est ad rhombum B F D G, vt quadratum A E, ad quadratum F K. Ergo ex æquali, sphæra ad rhombum B F D G, erit, vt quadratum B A, ad quadratum F K. Quod erat ostendendum.




## PROBL. XXXXII. PROP. CIII.

### In data sphæra inuenire rhombum, vt sphæra sit ad rhombum, in data ratione possibili.

RAtio possibilis est, vt proportio data non sit minor dupla, quia maximus rhombus inscriptibilium

lium in sphæra, est æquilaterus, qui est sphæræ subduplus. Data ergo sphæra sit A B C D, cuius diametri se se decussantes ad angulos rectos in E, sint A C, B D; & sit ducta B A, & data ratio sit, quam habet B A, ad H; & inter B A, & H, inueniatur media proportionalis, quæ vtique non erit maior A E, sed vel minor, vel æqualis, vt patebit. Si æqualis, facto rhombo B A D C, erit quæsitus. Si autem sit minor A E, sit hęc E L, & per punctum L, ducatur L F, parallela ipsi B D, occurrens sphæræ, vel ex vna parte, vel ex alia in F, & per punctum F, acto plano F K G, cui diameter B D, sit perpendicularis, fiat rhombus B F D G. Dico hunc esse quæsitum.

In primo casu, res est clara; nam est, vt A B, ad H, sic quadratum B A, ad quadratum A E, nempe sphęra ad rhombum B A D C, per antecedens Lemma.

In secundo verò casu, res est clarissima. Nam pariter est, vt B A, ad H, sic quadratum B A, ad quadratum E L, nempe ad quadratum F K; nempe sic sphęra ad rhombum B F D G. Quod erat ostendendum.

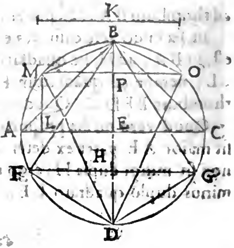
Quòd verò media proportionalis inter B A, & H, nō sit maior A E, patet ex determinatione; quia cum B A, non sit minor dupla H; ergo nec quadratum A B, erit minus duplò quadrato L E, seù F K.

PRO-

# PROBL. XLIII. PROP. CV.

## In data sphæra, dato rhombo inscribere alium rhombum, ad quem rhombus datus sit, in data ratione possibili.

Ratio possibilis est, vt non sit minor ea, quam habet quadratum semidiametri basis dati ad quadratum semidiametri sphæræ, quia proportio quadrati radij basis dati rhombi, ad quadratum semidiametri sphæræ, est proportio rhombi dati ad rhombũ maximum inscriptibilẽ in sphæra; ergo non potest esse minor ea.

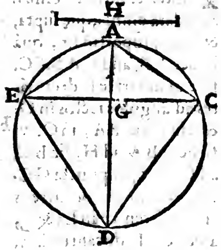



Sit ergo rhombus datus FBGD, in data sphæra A B C D, cuius diametri se secantes ad angulos rectos, sint B D, A C, & data ratio sit, quam habet A B, ad K, & fiat vt A B, ad K, sic quadratũ F H, ad quadratum alterius lineæ, quæ non erit maior A E, sed vel ei æqualis, vel minor. Si æqualis, rhombus B A D C, erit

erit quæsitus. Si minor, per L, acta L M, parallela B D, occurrens circumferentiæ, aut ex vna, aut ex altera parte, in puncto M, & intellecto rhombo M B O D, ipse erit quæsitus. Res est adeò euidens, vt non mereatur prolixiorem discursum.

## PROBL. XLIV. PROP. CVI.

### In data sphæra inscribere rhõbum, vt superficies conicę conorum, sint ad inuicem, in data proportione.




DAtæ sphæræ diameter sit A D, & data proportio sit, quã habet D A, ad H. Diuidatur D A, in G, vt sit, sicut quadratum D A, ad quadratum H, sic D G, ad G A; & per punctum G, acto plano E G C, cui diameter D A, sit normalis, fiat rhombus A E D C. Quem dico esse quæsitum.

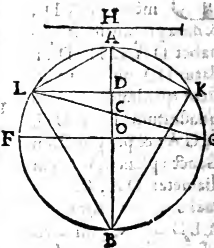
Quoniã enim vt DA,

qua-

quadratum, ad quadratum H, ita facta est D G, ad G A; vt autē D G, ad G A, sic (sūpta cōmuni altitudine DA,) rectangulū ADG, DAG, & rectāgulis ADG, DAG, sunt æqualia quadrata DE, AC, alterū alteri. Ergo, & vt quadratū D A, ad quadratū H, sic quadratū DE, ad quadratum A E. Ergo, & vt D A, ad H, sic D E, ad E A. Sed vt D E, ad E A, sic rectangulum D E G, ad rectangulū A E G; vt autem rectangulum D E G, ad rectangulum A E G, sic superficies conica coni E D C, ad superficiem conicam coni E A C. Ergo &c. Quod &c.

# PROBL. XLV. PROP. CVII.

## Idem.




IDem Problema soluetur aliter, & forsitá facilius. Sint data omnia, quę supra, & data proportio sit, quá habet A B, ad H. A B, F G, sint diametri se se decussátes ad angulos rectos in O; & diuidatur B A, in C, vt sit sicut B A, ad H, sic B C, ad C E; & per puncta G C, ducatur linea occurrens circumferentiæ in L; & à puncto L, ducantur L A, L B, & perpēdicularis LDK;

&

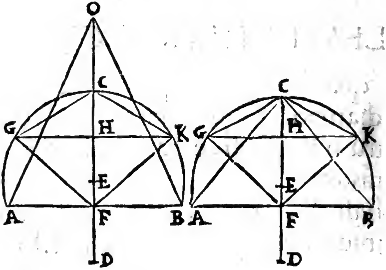
& intelligatur rhombus A L B K. Qui vtique erit quæsitus. Cùm enim duo anguli A L C, B L C, sint æquales, propter æqualitatem circumferentiarum A G, G B, quibus insistunt. Ergo vt B C, ad C A, seù, vt B A, ad H, sic B L, ad L A; nempe rectangulum B L D, &c. In reliquis sequatur præcedens demonstratio.

# LEM. LXIII. PROP. CVIII.

Sit quælibet portio sphæræ A C B; diameter totius sphæræ C D, centrum E; F, si cētrum basis portionis, & ducto quolibet plano G H K, basi A F B, parallelo, fiat rhombus inscriptus in portione C G F K. Dico portionem A C B, ad rhombum C G F K, esse, vt rectāgulum D F C, cum rectangulo E C F, ad rectangulum D H C.

Fiat, vt D F, ad D F, cum D E, sic C F, ad F O; & fiat conus O A B. Ergo, ex Archimede 2. de sphær. & Cylindr. supra citato, conus O A B, erit æqualis portioni A C B. Quoniam verò conus O A B, ad rhombum C G F K, habet proportionem compositam ex propor-

tione O F, ad F C, & ex proportione quadrati A F, ad quadratum G H. Ergo, & portio A C B, ad rhombum F G C K, habebit proportionem compositam ex ratione O F, ad F C, & ex ratione quadrati A F, ad quadratum G H; nempe ex ratione rectanguli D F C, ad rectan-




gulum D H C. Sed vt O F, ad F C, sic E D, cum D F, ad D F, ex constructione; & proportio rectanguli D F C, ad rectangulum D H C, componitur ex rationibus F D, ad D H, & F C, ad H C. Ergo, & proportio portionis A C B, ad rhombum C G F K, componetur ex rationibus E D, cum D F, ad D F; D F, ad D H, & F C, ad H C. Sed duæ rationes E D, cum D F, ad D F, & D F, ad D H, faciunt rationem E D, cum D F, ad D H. Ergo quoque proportio portionis ad rhombum componetur ex rationibus E D, cum D F, ad D H, & F C, ad C H. Sed istæ

duæ

duæ rationes componunt quoque rationem rectãgulorum DFC, & ED, FC, seù ECF, ad rectangulum DHC. Quare patet propositum.

Vel intelligatur conus ACB, super eandem basim, & circa eundem axim cum portione, quæ sit ACB. Ergo portio ACB, ex Archimede 2. de sphær. & Cylin. propos 7. est ad conum ACB, vt DF, cum DE, ad DF; sed vt DF, cum DE, ad DF, sic (sumpta communi altitudine FC,) rectangulum DFC, cum rectangulo DE, CF, hoc est cum rectangulo ECF, ei æquale, ad rectangulum DFC; vt autem conus ACB, ad rhombum CGFK, sic (propter eandem altitudinem CF) est quadratum AF, ad quadratum GH, seù rectangulũ DFC, ad rectangulum DHC. Ergo ex æquali, portio ACB, est ad rhombum GCKF, vt rectangulum DFC, cum rectangulo ECF, ad rectangulum DHC. Quod erat ostendendum.

# SCHOLIVM.

FOrsitan non erit inutile notasse, proportionem sphæræ, & hemisphærij ad suum rhombum, esse eandem; proportionem verò maioris portionis ad suum rhombum, esse is maiorem, minoris verò minorem. Quòd patet, quia, cùm portio ACB, sit ad rhombum GCKF, vt rectangulum DFC, cum rectangulo ECF, nempe cum quadrato EC, (si portio sit hemisphæriũ) ad rectangulum DHC; patet, quod in hemisphærio, rectangulum DFC, seù DEC, seù quadratum EC,

(quia hæc omnia ſunt vnum, & idem) cum quadrato E C, eſt duplum vnius quadrati E C. Quare hemiſphę-rium ad rhombum ſibi inſcriptum, eſt, vt quadratum inſcriptibile in circulo maximo, ad quadratum G H, quæ proportio eſt eadem cum proportione ſphæræ ad ſuum rhombum, per propoſit 103. Quod etiam facilius patet, ſupponendo portionem A C B, eſſe hemiſphærium, & mente intellecto rhombo C G D K, cuius baſis eadem G H K. quia cùm duo rhombi C G F K, & C G D K, habeant communem baſim G H K, erunt inter ſe, vt altitudines. vnde cùm in tali caſu, altitudo C D, ſit dupla altitudinis C F, ſicut etiam ſphæra eſt dupla hemiſphærij; patet permutando, ſphęram ad rhombum G C K D, eſſe vt hemiſphęrium A C B, ad rhombum C G F K.

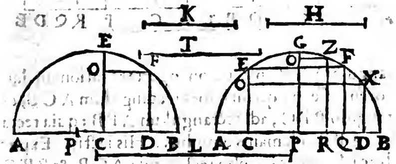
Quòd verò proportio maioris portionis ad ſuum rhõbum ſit maior his, & minoris minor; patet, quia rectãgulum D F C, in primo caſu, cum rectangulo E C F, eſt maius duplo quadrato C E, nempe quadrato inſcriptibile in circulo maximo; in ſecundo verò caſu eſt minus, vt eſperienti patebit. Res enim eſt facilis demonſtratu.

LEM-

# LEMMA LXIV. PROP. CIX.

## Datam A B, vtcumque ſectam in C, rurſum ſecare in D, inter C B, vt rectangulum A C B, vna cum rectangulo dimidiæ A B, in C B, ſit ad rectangulum A D B, in data ratione poſſibili.

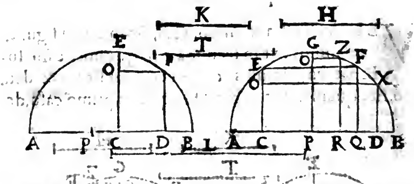
VEL A C, eſt non minor C B, vt in prima figura, vel minor, vt in ſecunda. In quolibet caſu ſuper A B, fiat ſemicirculus, cuius centrum ſit P, & data ratio ſit, quam habet A B, ad H, quæ in primo caſu, de-




bet eſſe maior proportione rectanguli A C B, cum rectangulo ſub dimidia A B, nempe ſub P B, in C B, ad rectangulum A C B, quia ſumpto vtcumque puncto D, ſemper rectãgulum A D B, minus eſt rectangulo A C B. In ſecũdo verò caſu, poteſt eſſe ęqualis, maior, & minor.

Nam

Nam, si fiat ipsi C P, æqualis P Q, rectangulum A C B, erit æquale rectangulo A Q B. Si verò punctum D, sumatur inter C, Q, rectangulum factum ex talibus segmentis, erit maius rectangulo A C B. Secus erit, si punctum D sumatur inter Q, B; nam semper tale rectangulum erit minus rectangulo A C B, vt consideranti patet. Si verò proportio data est minor ea, quam habet rectãgulum A C B, cum rectangulo P B C ad rectangulum A C B, nempe si rectangulum inueniendum sit maius




rectangulo A C B, patet non oportere rationem datam minorem esse ea, quam habet rectangulum A C B, cum rectangulo P B C, ad rectangulum A P B; quia rectangulum A P B, est maius omnibus. His iactis. Exponatur linea L, potens ambo rectangula A C B, & P B C, & fiat vt A B, ad H, sic L, ad K, & inter L, K, inueniatur media T, quæ in primo casu erit minor E C, erecta normaliter super A B, à puncto C; in secundo autem casu, vel erit æqualis E C, vel maior, sed nunquã maior A P, vel minor, vt patebit inferius. In primo casu, fiat C O, æqua-

æqualis T, & acta O F, parallela A B, ducatur F D, normalis super A B. Dico punctum D, esse quæsitum. In secundo autē casu, si T, sit æqualis EC, agatur E F, parallela A B, & ducatur F Q, perpendicularis, & punctum Q, erit quæsitum. Si autem T, sit quidem maior C E, sed æqualis A P, punctum P, erit quæsitum. Si verò T, sit quidem maior C E, sed minor A P, seù G P, erectæ normaliter à puncto P, fiat P O, æqualis T, & acta O Z, parallela A B, vel ex vna parte, vel ex alia, & demissa perpendiculari Z R, punctum R, erit quæsitum. Si tandem T, sit minor E C, facta ei æquali C O, & per punctum O, ducta parallela A B, ipsa O X, & à puncto X, demissa perpendiculari X D. Dico punctum D, esse quæsitum.

Quoniam enim factum est vt A B, ad H, sic L, ad K, & vt L, ad K, sic quadratum L, ad quadratum T, & cū T, sit æqualis in prima figura ipsi F D; in secunda autem vel F Q, vel G P, vel Z R, vel X D. Ergo, & vt A B, ad H, sic quadratum L, ad quadratum F D, in prima figura; in secunda verò, ad quadratum linearum æqualium ipsi T. Sed quadratum L, est æquale rectangulo A C B, & rectangulo P B C, & quadratis linearum æqualium ipsi T, in prima figura, est æquale rectangulum A D B, in secunda verò sunt eis æqualia facta sub segmentis A B, diuisæ in punctis vbi incidunt perpendiculares. Quaré, & vt A B, ad H, sic rectangula A C B, & P B C, ad rectangula inuenta, & supra exposita. Quare patet propositum.

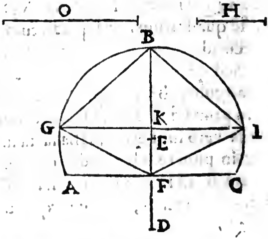
Quòd verò linea T, in ambabus figuris habeat con-

conditiones prius expoſitas, patet ex determinatione congruente vnicuique caſui, quæ determinationes ſupra ſunt expoſitæ.

## PROBL. XLVI. PROP. CX.

### Data qualibet ſphæræ portione, inſcribere in ipſa rhombum, vt portio ſit ad rhombum, in data proportione.

Data portio ſit ABC, & DB, ſit diameter ſphæræ, cuius eſt portio, E, ſit eius centrum, & data ratio ſit, quam habet BD, ad H. Cùm ergo ex propoſitione centum, & octo, pateat rationē portionis ad rhombum ſibi inſcriptum eſſe eandem cum ratione rectanguli DFB cum rectangulo FBF, ad rectangulū v.g DKB, inueniatur, per antecedens Lemma, punctum K, ſecundum hanc conditionem, vt illa duo rectangula ſint ad




rectan-

rectangulum DKB, vt BD, ad H. Si per punctum K, agatur planum GKL, parallelum AC, & fiat rhombus GFLB, hic erit quæsitus. Res est euidens.

## PROBL. XLVII. PROP. CXI.

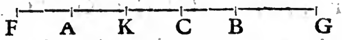
**In data portione dato rhombo inscripto, inscribere alium rhombum, vt rhombus prius inscriptus, sit ad hunc posteriorem, in data proportione.**

HOC Problema est facilissimum; quia cum illi duo rhombi sint in eadem altitudine, erunt inter se vt quadrata basium, & quadrata erunt vt rectangula contenta sub segmentis diametri; vnde adhibita congruenter Proposit. 109. habebimus intentum.

## LEMMA LXV. PROP. CXII.

**Datam rectam lineam FB, sectam in puncto K, rursum in C, diuidere inter K, B, vt rectangulum FCB, cum quadrato KC, sit ad rectangulum FBC, in data proportione.**

DAta proportio debet eſſe talis conditionis, vt ſi fiat in data proportione F K, ad aliam, hæc ſit minor tota F B. Nam ſi eſſet æqualis, eſſet vt F K, ad illã, aliã, hoc eſt ad FB, ita rectãgulũ FKB, ad rectãgulũ FBK,




vnde KB, nõ poſſet diuidi in data proportione; & multo minus poſſet diuidi, ſi illa alia eſſet maior F B. Sit ergo proportio data ea, quam habet F K, ad F A, vbicumque cadat punctum A, inter F, B, & fiat vt K F, ad F A, ſic K B, ad B G, ei poſitam in directum; deinde K B, taliter ſecetur in C, vt ſit ſicut G B, ad B A, ſic B C, ad C K. Dico punctum C, eſſe quæſitum.

Quoniam enim factum eſt, vt K F, ad F A, ſic K B, ad B G, & vt K B, ad B G, ſic (ſumpta communi altitudine K C,) rectangulum B K C, ad rectangulũ ſub K C, in B G. Ergo, & vt K F, ad F A, ſic rectangulum B K C, ad rectangulum ſub K C, in B G. Pariter vt K F, ad F A, ſic (ſumpta communi altitudine C B,) rectangulũ F K, C B, ad rectangulum F A, C B. Ergo, & vt K F, ad F A, tàm eſt rectangulum B K C, ad rectangulum ſub K C, in B G, quam rectangulum F K, C B, ad rectangulum F A, C B. Ergo & vt K F, ad F A, ſic ambo antecedentia ad ambo conſequentia, nempe rectangula B K C, & F K, C B, ad rectangula C K, B G, & F A, C B. Sed rectangula B K C, & F K, C B, faciunt rectangulum F C B, cum quadrato C K; quia rectangulum B K C, diuiditur in rectangulum B C K, & in quadratum K C; & rectangulum

gulum B C K, cum rectangulo F K, C B, facit rectangulum F C B. Ergo, & vt K F, ad F A, ſic rectangulum F C B, cum quadrato K C, ad rectangula G B, K C, & F A, C B.

Quoniam verò factum eſt ſupra, vt G B, ad B A, ſic B C, ad C K. Ergo rectangulum ſub G B, in K C, erit æquale rectangulo A B G. Et communi addito rectangulo F A, C B. Ergo rectangulum A B C, cum rectangulo F A, C B, quæ duo faciunt vnum rectangulum F B C, erunt æqualia rectangulis G B, K C, & F A, C B. Sed ſupra probatum eſt eſſe vt K F, ad F A, ſic rectangulum F C B, cum quadrato K C, ad duo rectangula G B, K C, & F A, C B. Quare & vt K F, ad F A, ſic erit rectangulum F C B, cum quadrato K C, ad rectangulum F B C. Quod erat oſtendendum.

## PROBL. XLVIII. PROP. CXIII.

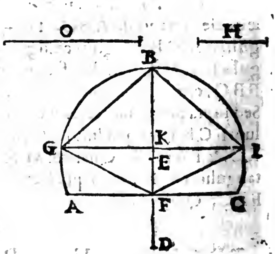
### Data qualibet ſphæræ portione, inſcribere in ipſa rhombum, vt ſuperficies conicæ conorum rhombi, ſint in data proportione.

Data portio ſit A C B, cuius axis ſit B F, & B D, ſit tota diameter ſphæræ, data proportio ſit, quam habet D F, ad H, & fiat vt D F, ad H, ſic H, ad O. Dico in primis hoc Problema eſſe determinatum, & determi-

 natio-

nationem esse, quod proportio data sit talis conditionis, vt si fiat in data proportione D F, defectus axis portionis a diametro sphæræ, ad aliam, quæ sit H, & proportio D F, ad H, continuetur ad tertium terminum O; O, sit minor diametro sphæræ, vt patebit inferius.

Linea ergo DB, diuisa in F, rursum diuidatur in K, inter F, B, vt rectangulum D K B, cum quadrato K F, sit ad rectangulum D B K, vt DF, ad O, per antecedens Lemma, & per punctum K, acto plano G K L plano A F C, parallelo, intelligatur rhombus BGFL, inscriptus in portione. Dico hunc esse quæsitum. Quoniam enim factum est, vt D F, ad O, nempe vt quadratum D F, ad quadratum H, sic rectangulum D K B, cum quadrato K F, ad rectangulum D B k, & rectangulo D k B, est æquale quadratum G k, & pariter rectangulo D B K, est æquale quadratum G B. Ergo & vt quadratum D F, ad quadratum H, sic quadratum G K, cum quadrato k F, nempe quadratum G F, æquale istis duobus quadratis, ad quadratum G B. Quare, & vt linea D F, ad lineam H, sic latus F G, ad latus G B. Sed vt F G, ad G B, sic (sumpta communi altitudine G K,)




rectan-

rectangulum F GK, ad rectangulum B G k; & vt rectangulum F G k, ad rectangulum B GK, sic superficies coni G F L, ad superficiẽ coni G B L, ex Archimede sępe citato. Ergo, & vt D F, ad H, sic superficies coni G F L, ad superficiem coni G B L. Quod erat faciendum.

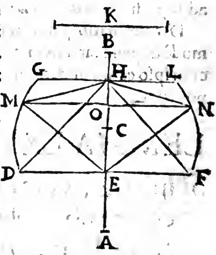
Determinatio patet, quia cùm hoc problema omnimodè dependeat à Lemmate antecedenti, debet sortiri cum ipso eandem determinationem. Quare patet propositum.

# LEMMA LXVI. PROP. CXIV.

Si sphæra, cuius diameter B A, secetur tribus planis GHL, MON, & D E F, parallelis, quibus diameter A B, sit normalis, & in segmento intermedio G D F L, inscribatur rhombus H M E N. Dico, quod secta H E, bifariam in C, segmentum G D F L, erit ad rhombum H M E N, vt tria rectangula sub A E, in CB, cum tribus rectangulis CHB, & cum duobus quadratis CE, ad rectangulum A O B.

Nam

NAM super basim DEF, & circa axim segmenti intermedij HE, facto cono DHF, segmentum ad rhombum de foris sumpto cono, habet rationem compositam ex ratione segmenti GDFL, ad conum DHF, & ex ratione coni DHF, ad rhombũ HMEN. Sed segmentum GDFL, est ad conum DHF, ex Cauaelerio supra citato, vt tria rectangula sub AE, in CB, cũ tribus rectangulis CHB, & cum duobus quadratis CE, ad rectangulum AEB; conus verò DHF, ad rhombum HMEN, quia sunt circa eundem axim HE, est, vt basis ad basim, nempe, vt quadratum DE, ad quadratum MO, seu vt rectangulum AEB, ad rectangulum AOB. Ergo ex æquali, segmentum GDFL ad rhombum GMEN, erit vt tria rectangula AE, CB, cum tribus rectangulis GHB, & cum duobus quadratis CE, ad rectangulum AOB. Quod &c.




# SCHOLIVM.

NON diuerso modo probaremus, segmentum GDFL, esse ad rhombum HMEN, vt tria rectangula BH, CA, cum tribus rectangulis CEA, & cum

cum duobus quadratis C H, seu C E, ad rectangulum B O A. Quare, cum rectangulum A O B, sit idem, ad quod ista plana habent eandem determinationem, patet esse æqualia, nempe tria rectangula A E, C B, cum tribus rectangulis C H B, & cum duobus quadratis C E esse æqualia tribus rectangulis B H, C A, tribus rectangulis C E A, & duobus quadratis C E, vel C H. Quibus hinc inde ablatis, & subtriplatis omnibus; vnũ rectangulum sub A E, in C B, cum vno rectangulo C H B, erit æquale vno rectangulo B H, C A, & vno rectangulo C E A. Vnde ex dictis habemus, quod si quædam recta linea B A, secetur in duobus punctis E, H, & rursùm segmentum intermedium H E, secetur bifariam in G; rectangulum A E, C B, cum rectãgulo C H B, erit æquale rectangulo *B*H, C A, cum rectangulo C E A. Quod etiam patet facilius, quia hæc rectangula sunt eadem plana, sed diuersimode denominata. Nam rectangulum sub A E, & B H, est idem cum rectangulo sub *B* H, E A; rectangulum verò sub A E, C H, est æquale rectangulo C E A; ergo duo rectangula sub A E, *B* H, & sub A E, C H, nempe rectangulum sub A E, C *B*, erit æquale rectangulo sub *B* H, E A, & rectangulo C E A. Et communi addito rectangulo C H B, cui est æquale rectangulum sub B H, C E. Ergo rectangulum sub A E, C *B*, cum rectangulo CHB, erit æquale rectangulo B H, E A; rectangulo C E A; & rectangulo B H, C E. Sed rectangulum B H, E A, cum rectangulo B H, C E, facit rectangulum B H, C A. Quare patet propositum.

Vnde

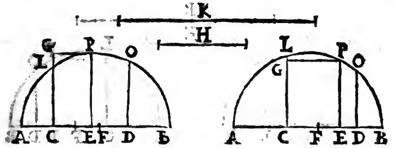
Vnde habemus ex dictis, quod si proponatur, vt proponetur in Lemmate sequenti. Datam rectam A *B*, sectam in duobus punctis E, H; rursùm secare in O, inter E, H, vt diuisa H E, bifariam in C, rectangulum sub A E, C B, cum rectangulo C H B, & cum sexta parte quadrati E H, sit ad rectangulum A O B, in data proportione; etiam si fiat in data proportione ex alia parte rectangulum sub *B* H, in C A, cum rectangulo C E A, & cum sexta parte quadrati H E, ad idem rectangulum B O A; tamen habebimus intentum.

## LEM. LVII. PROP. CV.

Datam rectam AB, sectam in punctis C, & D; rursùm diuidere in E, inter C, D, vt diuisa CD, bifariam in F, rectangulum sub A C, in F B, vna cum rectãgulo FDB, & cum sexta parte quadrati CD, sit ad rectangulum A E B, in data proportione.

HOC Lemma potest habere duplicem casum; nam vel A C, D *B*, sunt æquales, vel inæquales. Si sint æquales, patet, quod proportio data debet esse talis conditionis, vt semper sit minor ea, quam habet rectan-

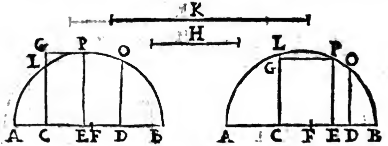
rectangulum sub A C, in F B, cum rectangulo F D B, & cum sexta parte quadrati C D, ad alterum rectangulorum A C B, A D B. Quod patet, quia in quocumque puncto E, secetur C D, semper rectangulum A E B, erit maius rectangulo A C B, vel A D B. Debet tamen proportio data adeò esse minor, vt supra expositum est, vt tamen non sit minor ea, quam habent prædicta illa plana, ad quartam partem quadrati A B; quia rectangulum æquale quartæ parti quadrati A B, est maximũ




omnium, vt consideranti patet. Si verò A C, D B, sint inæquales, oportet, quod proportio data sit minor ea, quam habent prædicta plana ad rectangulum sub minori illarum A C, D B, in reliquam totius A B. Debet tamen taliter esse minor, vt non sit minor ea, quam habent prædicta plana, ad quartam partem quadrati A B.

Data ergo ratio sit, quam habet A B, ad H, & super A B, fiat semicirculus, & exponatur linea K, potens simul rectangulum sub A C, in F B, cum rectangulo F D B, & cum sexta parte quadrati C D, & fiat vt A B, ad H, sic quadratum K, ad quadratum alterius lineæ,

quæ ex determinationibus ſupra expoſitis, erit non maior medietate A B, ſed ſemper maior, lineis C L, D O, erectis normaliter ſuper A B, à punctis C,D, in prima figura; & in ſecunda figura, ſemper erit maior O D, ſupponendo D B, eſſe minorem A C, ſed poteſt eſſe aliquando maior, aliquando æqualis, & aliquando minor ipſa C L, & hoc ſecundum diuerſas determinationes, & habitudines lineæ A C, ad totam A B, vt conſideranti patet; ſemper tamen erit non maior medietate




Sit ergo hæc alia C G, & per punctum G, ducatur G P, parallela A B, quæ ſemper occurret, ex determinationibus ſupra poſitis, circumferentiæ inter puncta L, O. Occurrat ergo vt in P, & à P, dimiſſa perpendiculari P E. Dico punctum E, eſſe quæſitum.

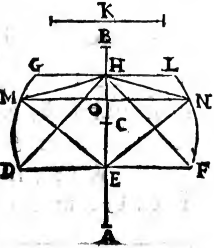
Cùm enim factum ſit, vt A B, ad H, ſic quadratum K, ad quadratum C G, nempe ad quadratum P E; & cum quadrato k, ſint æqualia rectangulum A C, F B, rectangulum F D B, cum ſexta parte quadrati C D; & pariter cum quadrato P E, ſit æquale rectangulum A E B. Ergo, & vt A B, ad H; ſic illa plana ad rectangulum A E B. Quod erat faciendum.

PRO-

# PROBL. IL. PROP. CXVI.

## In dato ſegmento intermedio inſcribere rhombum, vt ſegmentum ſit ad rhombum, in data proportione.

DAtum ſegmentum intermedium ſit G D F L, in quo inſcribendus ſit rhombus &c. Data ratio ſit, quam habet A B, ad k. Et ſecta E H, axis ſegmenti bifariam in C, diameter A B, ſphæræ taliter diuidatur in O, vt rectangulum ſub A E, C B, cum rectangulo C H B, & cum ſexta parte quadrati E H ſit ad rectangulum AOB, vt tertia pars A B, ad k, per antecedens Lemma. Et per punctum O, agatur planum M O N, prioribus parallelum, & ſuper ipsũ fiat rhõbus HM EN. Quem dico eſſe quæſitum.




Sed antequam procedamus ad demonſtrationem, ſciendum eſt; quod cum præſens Problema dependeat ab antecedenti Lemmate, vt patet, & vt magis patebit,

 debet

debet cum ipso sortiri easdem determinationes, quas repetere est superuacaneum.

Quoniam enim, vt tertia pars A B, ad K, sic rectangulum A E, C B, cum rectangulo C H B, & cum sexta parte quadrati E H, ad rectangulum A O B. Ergo, & vt antecedentium tripla; nempe vt A B, ad K, sic tria rectangula A E, C B, cum tribus rectangulis C H B, & cum tribus sextis partibus quadrati E H, nempe cum dimidio quadrati E H, seù cum duobus quadratis C E, ad rectangulum A O B. Sed & vt illa plana, ad rectangulum A O B, sic segmentum G D F L, ad rhombum H M E N, ex Propositio. 114. Quare patet propositum.

## LEM·LXVIII· PROP·CXVII·

Datam rectam lineam F G, sectam in punctis A, K, B, rursum secare in C, inter A, B, vt rectangulum F K G, sit ad rectangulum F C G, in data proportione.


HOc Lemma in aliter non differt à Propos. 115. nisi in hoc, quòd terminus antecedens proportionis est diuersum, sed consequens est idem, nempe rectangulum.

gulum.

gulum ortum ex ſectione lineæ F G, inter A, B. Quare recipit etiam cum ipſo eandem determinationem, & eandem explicatioaem, vt conſideranti patet. Quare non eſt amplius immorandum. Solum meminendum eſt, pro huius ſolutione, poſſe adhiberi, circulum Parabolam, & Ellipſim, vt dictum eſt ſupra in Scholio propoſit. 97.

## PROBL. L. PROP. CXVIII.

In dato ſegmento intermedio ſphæræ inſcripto rhombo, inſcribere alium rhombum, vt rhombus inſcriptus, ſit ad rhombum, qui inſcribetur, in data proportione.

HOc Problema dependet ab antecedenti Lemmate, & omnia ab explicatis in ſimili propoſito; quare ex ſuperioribus, facilè patet eius conſtructio, & demonſtratio.

## SCHOLIVM.

HIc eſſet ſoluendum Problema. In dato ſegmento intermedio, inſcribere rhombum, vt ſuperficies conorum rhombi ſint in data proportione, ſed quia hoc

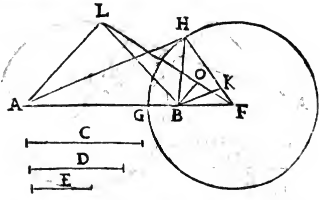
hoc Problema est quodam particulare contentum sub vniuersali, quod statim proponetur, ideò omittitur.

# LEM. LXIX. PROP. CXIX.

Inuenire circulum secantem datam rectam lineam magnitudine, & positione, taliter, vt ab extremitatibus datæ lineæ inflexis lineis, quæ vniantur in quolibet puncto circumferẽtiæ inuenti circuli, semper retineant imperatam rationẽ. Inflexis autem talibus lineis, & vnitis extra periphæriam, impossibile sit retinere eandem rationem.

HOC Lemma, vel per modum Problematis, vel per modum Theorematis, solutum fuit à diuersis. Nempe, ab Eutocio initio Comentariorum super Apollonium Pergæum. Postea aliqualiter à Bartholomæo Souero lib. 3 de recti, ac curui proportione, ni fallor. Deinde à Galileo in postremis Dialogis pagina, apud nos 45. Tandẽ à P. Bonauentura Caualerio exercitatione 6. Propos. 33. Et forsitan ab alijs, quos non vidimus. Soluemus ipsum, & nos, quamuis construc-
tione,

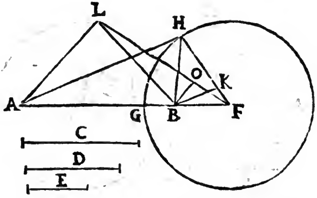
tione, & demonſtratione parum diuerſa à tradita ab Eutorio, præcipuè cum ipſo vtamur in ſolutione Problematum alicuius conſiderationis.




Data ergo recta linea ſit A B, & data proportio ſit, quam habet C, ad D. Oportet inuenire circulum ſecãtem A B, in puncto v.g. G, vt ab extremitatibus A, B, inflexis lineis A H, H B, ad quodlibet punctum circumferentiæ, ſemper A H, ad H B, ſit vt C, ad D.

Si data proportio ſit æqualitatis, Lemma, vt proponitur, nequit ſolui; quia, vt ibidem ait Galileus, hoc admirabile tunc accidit, quod circulus degeneret in rectã lineam indefinitam, perpendiculariter erectam ſuper datam rectam lineam A B, à puncto eius medio. Nam ab extremitatibus A, B, inflexis lineis ad quodlibet punctũ illius perpendicularis, ſemper hæ retinebunt proportionem æqualitatis, quia ſemper conſtituent triangulum æquicrure. Si verò proportio data ſit inæqualitatis, ſemper Lemma poteſt conſtrui; & eius conſtructio talis erit.

erit. Data ratio C, ad D, continuetur ad tertium terminum minorem, hoc est si C, sit maior D, fiat vt C, ad D, sic D, ad E; & fiat vt excessus C, super E, ad E, sic A B,




ad BF, ipsi productam in directum; & inter A F, F B, inueniatur media proportionalis, quæ sit FG. Tunc, centro F, interuallo FG, describatur circulus. Dico hunc esse quæsitum, nimirum, quod si in periphæria ipsius sumatur quodlibet punctum H, & vniantur in ipso A H, BH, quod semper A H, ad H B, erit vt C, ad D. Ducatur per punctum B, linea B K, parallela H A. Quoniam enim F G, est media proportionalis, per constructionem, inter A F, F B. Ergo vt A F, ad F G, seù ad F H, sic F G, seù F H, ad F B. Quare habemus duo triangula, nempe A F H, H F B quæ circa communem angulum F, habent latera proportionalia. Ergo sunt similia. Ergo angulus F H B, erit æqualis angulo H A F. Sed propter parallelas A H, BK, etiam angulus A H B, est æqualis alterno H B K. Ergo etiam duo triangula

A H B,

A H B, H B K, erunt similia. Ergo vt A H, ad H B, sic H B, ad B K. Et vt quadratum A H, ad quadratũ H B, sic A H, ad B K. Sed vt A H, ad B K, sic (ob parallelas A H, B K,) A F, ad F B, vt autem A F, ad F B, sic C, ad F, (quia cum supra factum sit, vt excessus C, super E, ad E, sic A B, ad B F.) Ergo, & vt C, ad E, seu, vt quadratum C ad quadratum D, sic erit quadratum A H, ad quadratum H B. Ergo, & vt C, ad D, sic A H, ad H B. Quod erat ostendendum.

Quòd verò extra circumferentiam circuli inuenti nõ sit reperibile aliud punctum, vt ad illud inflexis lineis à punctis A, B, inflexæ habeant proportionem C, ad D, patet. Nam, sit tale punctum, si datur, L, vel intra, vel extra circulum; & sint ductæ L A, L B, L F; & per punctum B, sit ducta B O, parallela A L. Quoniam, per hypothesim, vt C, ad D, sic A L, ad L B. Ergo & vt quadratum L A, ad quadratum L B, sic quadratum C, ad D, quadratum, nempe sic C ad E. Sed vt C, ad E, sic, ex præostensis A F, ad F B, & ob parallelas B O, L A, vt A F, ad F B, sic A L, ad B O. Ergo, & vt quadratum L A, ad quadratum L B, sic A L, ad B O. Ergo tres A L, L B, B O, sunt continue proportionales. Cùm verò angulus A L B, sit æqualis alterno L B O. Ergo triangula A L B, L B O, erunt similia. Vnde angulus L A B, erit æqualis angulo B L O. Cùm verò angulus ad F, sit cõmunis duobus triangulis A F L, L F B. Ergo hæc duo triangula cùm sint æquiangula, erunt similia. Vnde erit vt A F, ad F L, sic F L, ad F B. Quare F L, erit media proportionalis inter A F, F B. Sed etiam F H, est me-

dia proportionalis inter easdē duas A F, F B. Ergo duæ F L, & F H, erunt æquales. Quod implicat, siue punctum L, sumatur extra, vt in schemate, siue intra circulū. Quare patet propositum.

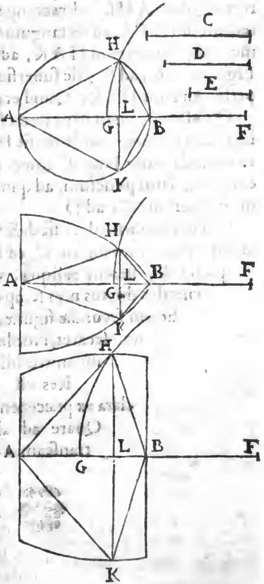
# ROBL. LI. PROP. CXX.

## In dato quolibet solido rotundo orto ex reuolutione circa axim, siue in dato quolibet eius segmento, seù ad verticem, seù intermedio, inscribere rhombum, vt superficies conicæ conorum rhombi, sint in data proportione.

SIT solidum quodlibet rotundum, vel sphæra, vel sphæroides, vel solidum cycloidale, vel quodlibet aliud ortum ex reuolutione circa axim, &c., inclusum à curua tantùm superficie, quod nobis repræsentatur in prima figura, Vel quælibet portio sphæræ, vel sphæroidis, vel quodlibet conoides, vel conus, vt in secunda; vel quodlibet segmentum intermedium prædictorum solidorum, vt in tertia, & omnium solidorū sit axis A B, oportet facere, quod imperatum est &c.

Data proportio sit quam habet C, ad D; quæ si sit æqualitatis, erubescimus verba profundere, cùm res etiā cæcu-

cæcutientibus ſit ſplendidiſſima. Si verò proportio data ſit inæqualitatis, vel eſt exceſſus, vel defectus; ſi eſt exceſſus, & data ratio C, ad D, continuetur ad tertium terminum E, & fiat vt exceſſus C, ſuper E, ad E, ſic A B, ad B F, poſitam ſibi in in directum, & inter A F, F B, inuenta media F G, centro F, interuallo F G, deſcribatur portio circuli ſecans ſuperficiem dati ſolidi in H; (in prima enim, & ſecunda figura ſemper ſecabit; in tertia verò nõ ſemper, ſed quando non ſecat, Problema eſt inſolubile, vt patebit inferius,) & per punctum H, ducatur planũ H L K, perpendiculare axi A B; & ſupra HLK, inſcribatur rhõbus A H B K. Dico hunc eſſe quæſitum.




Nam, per antecedẽ-

tem Propositionem, est; vt C, ad D, sic A H, ad H B. Sed vt A H, ad H B, sic (sumpta communi altitudine HL,) rectangulum A H L, ad rectangulum B H L, vt autem rectangulũ A H L, ad rectangulum B H L, sic ex Archimede, superficies coni H A K, ad superficiẽ coni B H K. Ergo, & vt C, ad D, sic superficies coni A H K, ad superficiem coni H B K. Quod erat faciendum.

Quòd verò, quando in tertia figura, circulus non secat superficiem, Problema sit insolubile, patet, quia, ex secunda parte Propos. antec. extra periphæriam circuli, non datur punctum, ad quod ductæ A H, H B, fint in proportione C, ad D.

Si verò proportio data sit defectus, tunc fieret vt D, maior ad C, minorem, sic C, ad E, & producta B A, ad partes A, fierent reliqua, vt supra. Sed tunc circulus ductus non semper secaret superficiem secundæ figuræ. At quando non secaret, Problema esset inconstruibile.

Res est clara ex præcedentibus. Quare ad alia transeamus.

# PROBL. LII. PROP. CXXI.

Data recta linea A B, à cuius extremitatibus A, B, ſint erectæ perpendiculares A D, B C, quæ pariter ſint datæ; reperire in A B, punctum E, vt iunctis E D, E C, & triangulis D E A, C E B, reuolutis circa A B, coni C E F, D E G, orti, ex tali reuolutione, ſint in data proportione.


Data proportio ſit, quam habet B A, ad H, & fiat vt quadratũ C B, ad quadratum D A, ſic B A, ad K, & B A, diuidatur in E, vt ſit, ſicut K, ad H, ſic B E, ad E A, & ductis E D, E C, intelligantur coni E C F, D E G. Quos dico eſſe quæſitos. Nam, ex propoſit. 1. proportio coni C E F, ad conum D E G; componitur

ex proportione quadrati GB, ad quadratum DA, & ex proportione BE, ad EA. Sed vt quadratum BC, ad quadratum DA, sic BA, ad K; & vt BE, ad EA, sic K, ad H. Ergo proportio coni CEF, ad conum DEG, componetur quoque ex proportione BA, ad K, & K, ad H. Sed istæ duæ proportiones componunt quoque rationem BA, ad H. Ergo vt BA, ad H, sic conus CEF, ad conum DEG. Quod erat faciendum.

## LEM. LXX. PROP. CXXII.

Data recta AB, & ab eius extremitatibus erectis normalibus BC, AD, quæ pariter sint datæ; reperire inter A, B, punctum E, vt ductis rectis lineis CE, DE, sint in data ratione possibili.

Data ratio sit, quam habet CB, ad H, quæ vel est æqualitatis, vel excessus, vel defectus. Si sit æqualitatis. Ducatur DC, & diuidatur bifariam in F, & à puncto F, super DC, erigatur normalis FE, quæ occurret AB, vel inter A, B, vt in E, vel in aliquo punctorum B, vel A; vel extra BA, vel ad partes A, vel ad partes B. Vbicumque occurrat, semper illud punctum erit quæsitum, nempe si ducantur ad illud punctum lineæ

neæ à punctis D, C, istæ semper erunt æquales. Sed quando occurrit, vel in punctis A, B, vel extra ipsa, Lemma non est solubile, vt proponitur. Quando verò occurrit intra, vt in E, ductis D E, C E, patet ipsas esse æquales. Nam cum duæ DF, FE, sint æquales duabus EF, FC, & anguli DFE, EFC, sint recti. Ergo basis D E, erit æqualis basi C E.

Si verò ratio data sit excessus, fiat vt C B, ad H, sic H, ad K, & producatur C D, in G, vt sit sicut C B, ad K, sic C G, ad G D, & inter C G, G D, inueniatur media G L, & centro G, interuallo G L, describatur circulus occurrens A B, inter A, B, in puncto E. Dico punctum E, esse quæsitum.


Ducantur C E, D E. Ergo per ea, quæ habita sunt prop. 119. vt C B, ad K, seu vt quadratum CB, ad quadratum H, seu vt quadratum C G, ad quadratum GL, sic quadratum C E, ad quadratum ED. Quare, & vt C B, ad H, sic C E, ad E D.

Si verò circulus non occurreret *B A*, inter *B*, A, Lemma vt proponitur esset insolubile, vt patet ex secunda parte eiusdem propos. 119. quia extra circumferentiam

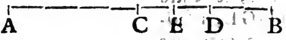
inuenti

inuenti circuli non eſt reperibile punctum, ad quod inflexæ lineæ retineant imperatam proportionem.

Si verò proportio C B, ad H, ſit defectus, fiat pariter, vt C B, ad H, ſic H, ad K; ſed D C, producatur vt factũ eſt prius, ſed ex parte C, & fiant reliqua, vt prius. Nam eodem diſcurſu concludemus conuertendo propoſitum. Factum eſt ergo, quod faciendum erat.

# SCHOLIVM.

EX hoc Lemmate habemus modum, quo ſoluamus alias duas propoſitiones, quæ ſub Lemmate continentur, tamquam particularia ſub generali.




Primum eſt. Datam rectam v. g. A B, ſectam in punctis C, D, rurſum diuidere C D, in E, vt duo quadrata A C, C E, ſint ad duo quadrata B D, D E, in data proportione. Nam ſi intelligamus A C, D B, eleuari ſupra C D, perpendiculariter, & inueniamus punctum E, vt ductis A E, B E, ſint in ſubduplicata ratione proportionis datæ, punctum E, erit quæſitum.

Secundum eſt. Datam rectam A B, ſectam in duobus punctis C, D, rurſum diuidere C D, in E, vt rectangulum A C B, cum quadrato C E, ſit ad rectangulum A D B, cum quadrato D E, in data proportione. Nam ſi à punctis C, D, intelligamus erectas perpendiculariter medias proportionales inter A C, C B; & inter A D,

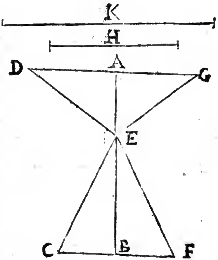
D B.

DB. Et in CD, inueniamus punctum E, vt ductis lineis ab extremitatibus normalium ad punctum E, quæ sint in subduplicata ratione data, factum erit, quod proponebatur, vt consideranti patet.

# PROBL. LIIII. PROP. CXXIII.

## Datis ijsdem, quæ in superiori Problemate, facere eadem, quæ ibidem, vt superficies conicæ conorum, sint in data proportione.

Data proportio sit, quam habet B A, ad H, & fiat vt C B, ad D A, sic B A, ad K, & inter puncta B, A, inueniatur punctum E, vt ductis C E, D E, sit vt K, ad H, sic C E, ad E D, per propositionem antecedẽtem, & ex triãgulis EBC EAD, reuolutis circa A B, fiant coni C E F, D E G. Dico hos esse quæsitos. Nam



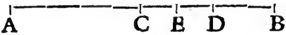

B A, ad H, habet rationem compositam ex ratione A B, ad K, & ex ratione K, ad H, sed

H, sed vt A B, ad K, sic facta est C B, ad D A, & vt K, ad H, sic C E, ad E D. Ergo ratio B A, ad H, componetur ex rationibus C B, ad D A, & C E, ad E D. Sed istæ duæ rationes componunt quoque rationem rectanguli E C B, ad rectangulũ E D A, & vt rectãgulũ E C B, ad rectangulũ E D A, sic superficies conica coni E C F, ad superficiem conicam coni E D G. Quare, & vt B A, ad H, sic superficies conica coni C E F, ad superficiem conicam coni E D G. Quod erat faciendum.

## LEM. LXXI. PROP. CXXIV.

Datam rectam lineam A B, sectam vtcumque in duobus punctis C, D, rursum diuidere in E, inter C, D, vt rectangulum A E C, sit ad rectangulum B E D, in data proportione.

Lemma duplicem habet casum, secundùm quod proportio data est æqualitatis, vel inæqualitatis.

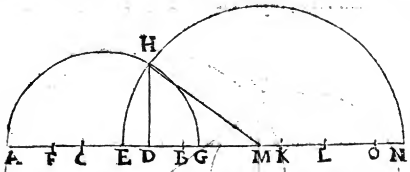



Si sit æqualitatis. Diuidatur D C, in E, vt sit sicut A D, ad C *B*, sic D E, ad E C. Dico punctum E, esse quæsitum. Quoniam enim, vt tota A D, ad totam C B, sic

ablata

ablata D E, ad ablatam E C; ergo & reliqua A E, erit ad reliquam E B, vt tota ad totam, seù vt ablata D E, ad ablatam E C. Ergo rectangulum A E C, erit æquale rectangulo B E D.

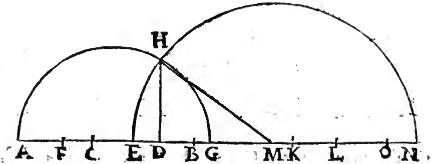
S I verò proportio data sit inæqualitatis, determinetur rectangulum, quod debet esse maior terminus datæ proportionis, & sit hoc rectangulum A E C. Data ra-




tio sit, quam habet A C, ad C F, & fiat, vt A F, ad F C, sic C D, ad D G, & super A G, fiat semicirculus, & à puncto D, erigatur super A G, normalis D H. Sumatur autem ipsius D G, dupla D K, & pariter fiat vt A F, ad F C, sic A C, ad K L, ipsi A K, positam in directum, & tandem fiat vt A F, ad A C, sic D B, ad L O, itidem A L, positam in directum; & secta D O, bifariam in M. & iuncta M H, centro M, interuallo M H, fiat semicirculus, qui vtique secabit C D, inter C, D, vt postea ostendetur; secet igitur eam in puncto E. Dico punctum E, esse quæsitum. Quoniam enim rectangula A D G, N D E, sunt æqualia, quia ambo æqualia eidem quadrato D H,

 &

& pariter rectangulo N D E, est æquale rectangulum O E D, quia N O, vt facilè patet, est æqualis ipsi D E, & O E, est æqualis ipsi N D. Ergo rectangulum A D G, erit æquale rectangulo O E D. Ergo vt A D, ad E O, sic E D, ad D G. Sed vt A D, ad E O, sic (sumpta communi altitudine A F,) rectangulum D A F, ad rectangulum sub O E, in A F. Ergo & vt E D, ad D G, sic rectangulum D A F, ad rectangulum sub O E, in A F. Quoniam verò, supra factum est, vt A F, ad F C, sic

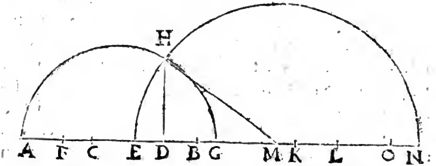



C D, ad D G. Ergo, & permutando, vt A F, ad C D, sic F C, ad D G. Et conuertendo vt C D, ad A F, sic D G, ad F C. Sed vt C D, ad A F, sic (sumpta communi altitudine A D,) rectangulum A D C ad rectangulum D A F. Ergo, & vt D G, ad F C, sic rectangulum A D C, ad rectangulum D A F. Sed quoque supra probatum est, vt E D, ad D G, sic rectangulum D A F, ad rectangulum sub O E, in A F. Ergo ex æquali; & in perturbata analogia, vt E D, ad F C, sic rectangulum A D C, ad rectangulum sub O E, in A F. Sed rectangulum

gulum sub O E, in A F, diuiditur in rectangulum sub D E, in A F, in rectangulum sub D K, in A F, in rectangulum sub K L, in A F, & in rectangulum sub L O, in A F. Ergo & vt E D, ad F C, sic rectangulum A D C, ad rectangulum sub D E, in A F, cum rectangulis sub D K, in A F, sub K L, in A F, & sub L O, in A F. Sed rectangulum sub D K, in A F, est æquale duplo rectangulo F C D, quia supra factum est, vt A F, ad F C, sic C D, ad D G vel dupla C D, ad duplam D G, quæ est ipsa D K. Et pariter rectangulum sub A F in K L, est æquale rectangulo A C F, quia supra factum est, vt A F, ad F C, sic A C, ad K L. Et tandem rectangulum sub L O, in A F, est æquale rectangulo sub A C, in D B quia pariter supra factũ est, vt A F, ad A C, sic D B ad L O. Ergo & vt D E, ad F C, sic rectangulum A D C, ad quinque rectangula, nempe ad rectangulum sub D F, in A F, cum duobus rectangulis F C D, cum rectangulo A C F, & cum rectangulo sub A C, in D B. Quod seruetur.

Rursum, quoniam vt D E, ad F C, sic (sumpta communi altitudine D E) quadratum E D, ad rectangulum sub E D, in F C. Ergo, & vt D E ad F C, tàm est rectangulum A D C, ad illa quinque rectangula, quàm quadratum D F, ad rectangulum sub D E, in F C. Ergo & vt D E, ad F C, sic ambo antecedentia ad ambo consequentia, nempe rectangulum A D C, cum quadrato D E, ad sex rectangula, nempe ad rectangulum sub E D, in F C, cum rectangulo sub E D, in A F, cum duobus rectangulis F C D, cum rectangulo A C F, & cum rectangu-

tangulo sub A C in D B. Sed rectangula sub D E, in F C, & sub D E, in A F, faciunt rectangulum sub D E, in C A. Et pariter rectangulum sub A C, in D B, cum rectangulo sub A C, in E D facit rectangulum sub A C, in E B. Ergo, & vt D F, ad F C, sic rectangulum A D C, cum quadrato D E, ad rectangulum sub A C, in E B, cum duobus rectangulis F C D, & cum rectangulo A C F.




Tandem vt D E, ad F C, sic (sumpta communi altitudine composita ex A C, & ex dupla C D,) rectangulum sub E D, in talem compositam, nempe rectangulū sub A C, in E D, cum duobus rectangulis C D E, ad rectangulum A C F, cum duobus rectangulis D C F. Quare, & vt rectangulum A D C, cum quadrato D E, ad rectangulum sub A C, in E B, cum duobus rectangulis F C D, & cum rectangulo A C F, sic rectangulum sub A C, in E D, cum duplo rectangulo C D E, ad rectangulum A C F, cum duobus rectangulis F C D. Cùm ergo sit, vt totum ad totum, ita ablatum ad ablatum. Ergo, & reliquum ad reliquum erit vt totum ad totum, siue

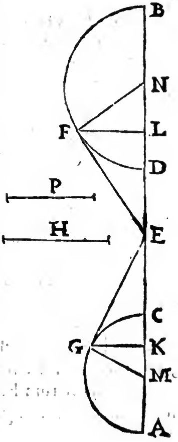
siue vt D E, ad F C. Quare & vt D E, ad F C, sic excessus rectanguli A D C, cum quadrato E D, super rectangulum A C, E D, & super duo rectangula C D E, ad rectangulum sub A C, in E B. Sed excessus rectanguli A D C, cum quadrato D E, super rectangulum sub A C, in E D, & super duo rectangula C D E, est rectangulum A E C. Quia rectangulum A D C, diuiditur in rectangulum A C D, & in quadratum C D; duo autem quadrata C D, D E, excedunt duo rectãgula C D E, quadrato C E, & rectangulum A C D, excedit rectangulum A C, E D, rectangulo A C E, quod cum quadrato C E, facit rectangulum A E C. Ergo, & vt D E, ad F C, sic rectangulum A E C, ad rectangulum sub A C, in E B. Sed vt A C, ad E D, sic rectangulnm sub A C, in E B, ad rectangulum B E D. Ergo ex æquali in perturbata analogia, vt A C, ad C F, sic rectangulum A E C, ad rectangulum B E D. Quod erat &c.

Quòd verò assumptum est supra, nempe punctum E, cadere inter C, D; patet. Nam, si non cadit inter C, D, cadet vel in C, vel vltra C. Non in C, quia eodem progressu, demonstrabitur esse, vt D E, ad F C, sic excessus rectanguli A D C, cum quadrato D E, seù ex hypothesi, cum quadrato D C, super rectangulum A C D, & super duo rectangula C D E, nempe super duo quadrata C D, qui excessus esset in tali casu nihil, ad rectangulum sub A C, in C B, nempe ad rectangulum A C B. Quod implicat. Et multum maius absurdum concluderetur, si punctum E, caderet vltra C; quia tunc minus nihilo, esset ad rectangulum positiuum, vt E D, ad F C.

LEM-

# LEM. LXXII. PROP. CXXV.

Datis duobus ſemicirculis extra ſe poſitis, nec ſe contingentibus, quorum diametri ſint ſibi in directum, reperire in linea intermedia inter duos ſemicirculos punctum, à quo ductis tangentibus ſemicirculos, iſtæ ſint ad inuicem, in data proportione.




Dati duo ſemicirculi ſint, quorum diametri B D, C A, ſint vna linea continuata, & D C, ſit linea extra ſemicirculos, & inter ipſos intercepta. Oportet autem facere, quod imperatum eſt. Data proportio ſit, quam habet A C, ad H, & fiat vt A C, ad H, ſic H, ad P; deinde per Lemma antecedens, in C D, inueniatur punctum E, vt rectangulum A E C, ſit ad rectangulum B E D, vt A C, ad P,

&

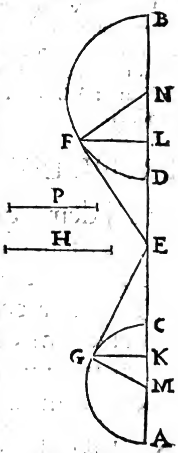
& à puncto E, ducantur tangentes EF, EG. Quas asſero eſſe quæſitas. Nam, quoniam vt AC, ad P, tàm eſt quadratum AC, ad quadratum H, quàm rectangulum AEC, ad rectangulum BED, & rectangulis AEC, & BED, ſunt æqualia quadrata tangentium EG, EF, alterum alteri. Ergo, & vt quadratum AC, ad quadratum H, ſic quadratum EG, ad quadratum EF. Quare, & vt AC, ad H, ſic EG, ad EF. Quod erat faciendum.

## PROBL. LIV. PROP. CXXVI.

Datis iiſdem, quæ in ſuperiori Lemmate, inuenire in CD, punctum E, vt ductis tangentibus EF, EG, & à centris M, & N, ſemicirculorum ductis MG, & NF, duo triangula rectangula MGE, NFE, ſint in data proportione.

Quod triangula MGE, & NFE, ſint rectangula, patet ob tangentes, & ſemidiametros. Data ergo proportio ſit, quam habet AM, ad H, & in CD, inueniatur punctum E, inter C, D, vt ductis tangentibus EG, EF, tangens GE, ſit ad tangentem FE, vt ND, ad H, & iungantur FN, GM. Dico trian-

gula M G E, N F E; esse quæsita. Dimittantur à punctis G, F, perpendiculares G K, F L. Tunc arguitur sic. Proportio A M, ad H, cōponitur ex proportione A M, ad N D, seù M G, ad N F, & ex proportione ND, ad H, hoc est, ex factis, ex proportione G E, ad E F. Sed hæ duæ proportiones componunt etiam proportionē rectanguli MGE, ad rectangulum N F E. Ergo & vt A M, ad H, sic rectangulum M G E, ad rectangulum N F E. Sed propter similitudinem triangulorum rectangulorum E G M, G M K, rectangulum M G E, est æquale rectangulo sub E M, in K G, & pariter propter eandē rationem similitudinis, rectāgulū E F N, est æquale rectāgulo sub N E, in F L. Ergo, & vt A M, ad H, sic rectangulum sub E M, in K G, ad rectangulum sub N E, in F L. Ergo, & horum rectangulorum dimidia, nempe triangula E G M, E F N. Ergo, & vt A M, ad H, sic triangulum E G M, ad triangulum N F E. Quod erat faciendum.

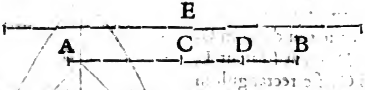



LEM-

# LEM·LXXIII· PROP·CXXVII·

## Datam A B, sectam in C, rursùm diuidere in D, inter C, B, vt rectangulum A B, C D, sit ad rectangulum AD, CB, in data proportione.

PAtet proportionem datam oportere esse defectus, quia rectangulum A B, C D, minus est rectangulo A D, C B, vt facile patebit consideranti. Proportio ergo data sit ea, quam habet A B, ad E, & fiat vt excessus E, super C B, ad C B, sic A C, ad C D. Patet punctum D, cadere inter C, B, quia non solum E, est maior A C, sed etiam A B. Dico punctum D, esse quæsitum. Quoniam enim factum est, vt excessus E, super

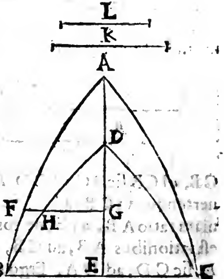


C B, ad CB, sic AC, ad C D. Ergo, & cõponendo, & conuertendo, vt C B, ad E, sic C D, ad D A. Tunc, quoniam ratio A B, ad E, de foris sumpta C B, composita est rationibus A B, ad C B, & C B, ad E, & vt C B, ad E, sic C D, ad D A. Ergo ratio A B, ad E, componetur ex rationibus A B, ad C B, & C D, ad D A. Sed

ex ijsdem rationibus componitur ratio rectanguli A B, C D, ad rectangulum A D, C B. Quare patet factum esse, quod proponebatur.

## PROBL. LV. PROP. CXXVIII.

### Datis duabus Parabolis ABC, DBC, in eadem basi B C, & circa eandem diametrum A E, inæqualis tamen altitudinis. Ducere FHG, ordinatim applicata, vt F G, ad G H, sit in data proportione.




DAta proportio sit, quam habet BC, ad K, quæ continuetur ad tertium terminum L, & datam A E, diuisa in D, rursùm diuidatur in G, inter D, E, vt sit sicut L, ad B C, sic rectangulum A E, G D, ad rectangulũ A G, D E, per proposit. antecedẽtem, & per punctum G. ordinatim applicetur G H F. Quam dico esse quæsitam. Quoniam enim quadratum F G, ad quadratum

dratum G H, de foris sumpto quadrato B E, habet rationem compositam ex ratione quadrati F G, ad quadratum B E, & ex ratione quadrati B E, ad quadratum H G. At vt quadratum F G, ad quadratum B E, sic A G, ad A E; & vt quadratum B E, ad quadratum H G, sic E D, ad D G. ex primo Conic. proposit. 20. Ergo ratio quadrati F G, ad quadratum G H, componetur ex rationibus A G, ad A E, & D E, ad D G. Sed ex iisdem rationibus componitur ratio rectanguli A G, D E, ad rectangulum A E, D G, & vt rectangulum A G, D E, ad rectangulum A E, D G, sic facta est conuertendo B C, ad L, nempe quadratum B C, ad quadratum K. Ergo, & vt quadratum B C, ad quadratum K, sic quadratum F G ad quadratum G H. Ergo, & vt B C, ad K, sic F G, ad G H. Quod erat faciendum.

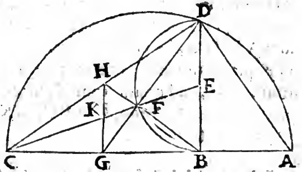
## LEM. LXXIV. PROP. CXXIX.

Datam rectam lineam taliter diuidere in puncto, vt rectangulum sub tota, & sub altero, segmentorum ad quadratum alterius segmenti, sit in data proportone.

HOC Lemma solutum est etiam propos. 20. sed ad vberiorem scientiam, soluetur etiam nunc aliter, quamuis prolixius. Sit ergo data recta linea C B, quæ taliter sit secanda in G, vt rectangulum B C G, sit ad

qua-

quadratum G B, in data proportione. Data proportio ſit, quam habet C B, ad B A, ſibi poſitam in directum, & ſuper A C, fiat ſemicirculus, ac à puncto B, erigatur normalis B D, & ſuper diametrum D B, fiat ſemicirculus ad partes C, cuius centrum ſit E, & ducatur E C, ſecans circulum in F, & per puncta D F, ducatur D F G, occurrens B C, in G. Dico punctum G, eſſe quæſitum.




Ducatur D C, & per punctum G, agatur G H, parallela D B; & ducantur B F, F H. Quoniam D B, & H G, ſunt factæ parallelæ, & D B, ſecatur bifariam in E, à linea C E. Ergo & H G, ſecabitur ab eadem bifariam in K, & angulus F K G, erit æqualis angulo D E F. Sed & angulus D F E, eſt æqualis ſibi ad verticem K F G. Ergo triangulum D F E, erit æquiangulum, & ſimile triangulo K F G. Ergo, vt F D, ad D E, ſic F G, ad G K. Et ad conſequentium dupla. Ergo vt F D, ad D B, ſic F G, ad G H. Sed & angulus G D B, eſt æqualis ſibi alterno H G F. Ergo duo triangula D F B. H F G, ſunt ſimilia. Ergo angulus rectus D F B, eſt æqualis recto H F G.

Ergo

Ergo duæ lineæ B F, F H, sunt sibi in directum. Cùm autem triangulo D F B, sit simile triangulum D B G; & pariter triangulo H G F, sit simile triangulum H G B, quia omnia sunt rectangula, & bina habent vnum angulum communem. Ergo, & triangulum D B G, erit simile triangulo H G B. Quare vt D B, ad B G, ita B G, ad G H. Quare rectangulum sub D B, H G, erit æquale quadrato G B. Iungatur A D. Ergo triangulum D B A, est simile triangulo D B C; triangulo autem D B C, est simile triangulum H G C. Ergo vt D B, ad B A, sic H G, ad G C. Ergo rectangulum sub D B, in H G, erit æquale rectangulo sub C G, in B A. Sed rectangulum sub D B, in H G, ostensum est æquale quadrato G B. Ergo quadratum G B, erit æquale rectangulo sub C G, in B A. Ergo tres C G, G B, B A, sunt continue proportionales. Cùm autem sit, vt C G, ad G B, sic quadratum C G, ad rectangulum C G B. Ergo, & componendo, vt C B, ad B G, sic quadratum C G, cum rectangulo C G B, nempe rectangulum B C G, ad rectangulum C G B. Sed vt C G, ad G B, seù vt G B, ad B A, sic rectangulum C G B, ad quadratum G B. Ergo ex æquali vt C B, ad B A, sic rectangulum B C G, ad quadratum G B. Quod erat faciendum.

## SCHOLIVM.

Constructio præsentis Lemmatis potest inseruire pro solutione propositionis. *Data vna extremarum in ordine trium continue proportionalium, & sum*-

ma

ma mediæ, & alterius extremæ, diſtinguere ſingulas. Nam cùm probatum ſit C G, G B, & B A, eſſe tres continue proportionales. Ergo B A, eſt vna extremarum, & C B eſt compoſita ex altera extrema, & ex media.

## LEM. LXXV PROP. CXXX.

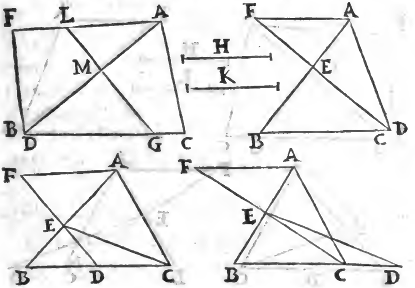
Dato triangulo ABC, & per punctum A, acta A F, indefinita, & parallela B C, & dato in B C, etiam producta ad partes C, punctum D, & ducta D E F, triangulum externum F E A, ſit ad triangulum datum A B C, in data proportione.

QVatuor diuerſis modis poteſt dari punctum D, in linea B C. Nam vel poteſt cadere in ipſo B, vt in prima figura, vel in ipſo C, vt in ſecunda; vel inter B, C, vt in tertia; vel tandem vltra B C, vt in quarta. Si cadit in B, vt in prima, tunc res eſt facilis negotij. Nam data ratio ſit, quam habet B C, ad H Et fiat vt H, ad B C, ita B C, ad F A, & ducatur F B. Dico triangulum F B A, eſſe quæſitum. Quod patet, quia cum duo triangula F B A, B A C, ſint inter eaſdem parallelas; ergo habebunt eandem altitudinem. Quare

erunt

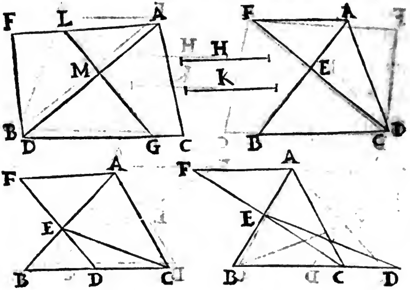
erunt ad inuicem, vt bases. Ergo triangulum F B A, erit ad triangulum B A C, vt basis F A, ad basim B C, seu vt B C, ad H.

In alijs tribus casibus semper fiat, vt B C, ad B D, ita H, ad K, & per propos. antec. B A, taliter secetur in E, vt rectangulum A B E, sit ad quadratũ A E, vt K, ad BC,




& ducatur per puncta D E, linea DEF, occurrens AF, in F. (Occurret enim, quia F A, B C, sunt parallelæ.) Dico triangulum F A E, esse quæsitum. Ducatur E C. Triangulum F A E, ad triangulum A B C, habet rationem cõpositam, ex rationibus trianguli FAE, ad triangulum B E D; trianguli B E D, ad triangulum B E C; & trianguli B E C, ad triangulum A B C. Sed triangulũ F E A, ad triangulum B E D, (quia ob parallelas FA, BC, sunt similia,) est vt quadratum A E, ad quadratum E B; &

triangulum B E D, eſt ad triangulum B E C, vt B D, ad B C; triangulum verò B E C, eſt ad triangulum B C A, vt B E, ad B A. Quare ratio trianguli F A E, ad triangulum A B C, componetur quoque ex ratione quadrati A E, ad quadratum E B, ſeù ex duplicata ratione A E, ad E B; & ex rationibus B D, ad B C; & B E, ad B A. Sed ex vna




ratione A E, ad E B, & ex ratione B F, ad B A, componitur ratio A E, ad B A, & vt B D, ad B C, ita eſt K, ad H Ergo ratio trianguli F A E, ad triangulum A B C, componetur quoque ex vna ratione A E, ad E B, ex ratione A E, ad A B, & ex ratione K, ad H. Sed ex rationibus A E, ad E B, & A E, ad A B, componitur ratio quadra- A E, ad rectangulum A B E; & vt quadratum A E, ad rectangulum A B E, ſic eſt B C, ad K, conuertendo per conſtructionem. Ergo & ratio trianguli F A E, ad triangulum

lum

lum B A C, componetur ex rationibus B C, ad K, & K, ad H; nempe erit ad ipsum, vt B C, ad H. Quod erat faciendum.

## SCHOLIVM.

Ex dictis habemus modum, quo soluamus hanc propositionem. Dato parallelogrammo F C, vt in prima figura, cuius diameter sit B A, & dato in B C, etiam producta ad partes C, punctum G, ducere G M L, vt triangulum L M A, sit ad parallelogrammum F C, in data proportione. Soluta est enim propositio in triangulo, quod est dimidium parallelogrammi.

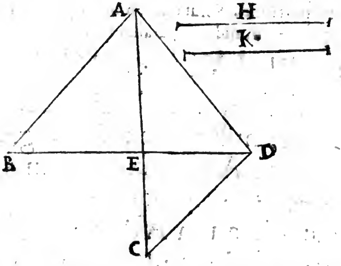
## PROBL. LVI. PROP. CXXXI.

Datis duabus rectis lineis B A, A D, continentibus quemlibet angulum, & data A C, secante angulum B A D, vtcumque; datoque in altera ipsarum A B, vel A D, puncto D. Ducere D E B, vt quadratum B E, sit ad rectangulum B D E, in data proportione.

Data proportio sit, quam habet H, ad K, & per punctum datum D, agatur D C, parallela B A,

 quæ

quæ vtique occurret A C, indefinite productæ, quia cum ipsa concurrit etiam ei parallela B A; occurrat in C, adeò vt fiat triangulum A C D; per proposit. ergo anteced., dato in C D, puncto D, ducatur D E B, occurrens A B, in B, vt triangulum A B E, sit ad triangulum A C D, vt H, ad K. Dico factum esse, quod proponebatur. Nam triangulum B E A, ad triangulum A C D, habet rationem compositam ex ratione trianguli B E A, ad triangulum A E D, & trianguli A E D, ad triangulum A C D. Ergo ratio quoque H, ad K, com-




ponetur ex istis rationibus. Sed vt triangulum BAE, ad triangulum A E D, sic est B E, ad E D; & vt triangulum E A D, ad triangulum A D C, sic est A E, ad A C. Sed ob parallelas B A, C D, vt A E, ad A C, sic B E, ad B D. Ergo ratio quoque H, ad K, componetur ex ratione BE,

ad

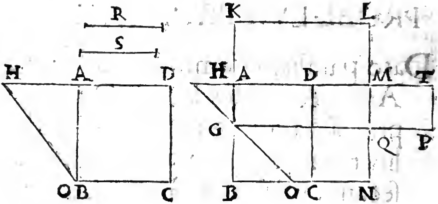
ad E D, & ex ratione B E, ad B D. sed istæ duæ rationes componunt quoque rationem quadrati B E, ad rectangulum B D E. Ergo erit vt H, ad K, sic quadratum B E, ad rectangulum B D E. Quod erat faciendum.

## PROBL. LVII. PROP. CXXXII.

Dato parallelogrammo quocumque A C, & in eius basi B C, etiam protracta ad partes C, dato vbilibet puncto O, ducere O G H, secantem latus A B, in G, & occurrentem M A, protractæ indefinite in H, vt triãgulum H A G, sit ad parallelogrammum A C, in data proportione.

Data proportio sit, quam habet R, ad S. Punctum autem O, potest cadere, vel in B, vel in C, vel inter C, B, vel tandem vltra C. Si cadit in *B*, vt in prima figura. Problema est facilis solutionis. Nam si fiat, vt S, ad R, sic dupla D A, ad A H, & iungatur *B* H, triangulum H A *B*, erit quæsitum. Nam triangulum H A B, ad triangulum, cuius basis dupla A D, & eadem altitudo cum altitudine trianguli H A B, est vt H A, ad duplam

duplam A D, nempe ex constructione vt R, ad S. Sed triangulo cuius basis A D, & altitudo, altitudo trianguli H A B, seù parallelogrammi A C, est æquale parallelogrammum A C. Quare patet propositum.




SI autem cadit in C, vel inter B, C, vel vltra C. In omnibus istis casibus fiet eadem constructio. Ad euitandam verò confusionem ponemus tantùm figuram, in qua cadit inter B, C. Vnusquisque etenim poterit applicare eandem constructionem cæteris casibus. Producatur *B* A, in K, vt A K, sit æqualis *B* O; deinde fiat vt S, ad R, sic parallelogrammum A C, ad aliud, cuius duplo applicetur ad rectam K A, in angulo K A D, æquale; quod sit K M, & vbicumque secet A *D*, etiam productam, si opus sit, compleatur parallelogrammum K N, & ad datam rectam lineã A M, in angulo *B*AM, applicetur parallelogrammũ A P, æquale parallelogrammo A N, excedens rhombo M P, secans A *B*, in puncto G, & per puncta O G, ducatur O G H, occurrens D A,

in

in H, & faciens triangulum H A G. Dico triangulu m H A *G*, esse quæsitum.

Quoniam enim parallelogrammum A N, est æquale parallelogrammo A P. Commune ablato parallelográmo A G. *E*rgo parallelogrammum reliquum *G* N, erit æquale rhombo M P; & sunt in eodem angulo, quintàm angulus *B G* Q. quàm angulus Q M T, externi, sunt æquales interno, & opposito *G A* M. *E*rgo vt *B* N, seù A M, ei æqualis, ad M Q, seù ad A *G*, ei æqualem, ita M Q, ad Q N, seù A G, ad *G* B. Sed vt A *G*, ad *G B*, sic (propter similitudinem triangulorum H *A* G, *G* BO, sunt enim similia, quia H A, B O, sunt parallelæ) ita H *A*, ad *B* O, seù ad *A* K, (supra enim facta est *A* K, æqualis ipsi *B* O.) Quare, & vt M *A*, ad *A G* sic H *A*, ad *A* K. *E*rgo, quod fit sub extremis est æquale facto sub medijs, dummodo omnia sint facta sub eodem angulo, vt ab alijs ostenditur, sed præcipuè à Caualerio lib 2. *G*eometr. indiuid. propos. 7. Ergo quod fit sub M *A*, in *A* K, nempe parallelogrammum M K erit æquale ei, quod fit sub H *A*, in A *G*, nempe parallelogrammo duplo trianguli H A *G*; quia duo anguli K A M, & H A *G*, ad verticem sunt æquales. *E*rgo, & illorum dimidia erunt æqualia, nempe triaugulum H A *G*, erit æquale dimidio parallelogrammi K M. Sed dimidium parallelogrammi K M, est ad parallelogrammum A C, vt R, ad S; (factum est enim supra vt S, ad R sic parallelogrammũ A C, ad aliud, cuius duplum factũ est parallelogrammũ K M.) Quare, & vt R, ad S, sic triangulum H A *G*, ad parallelogrammum A C. Quod erat faciendum.

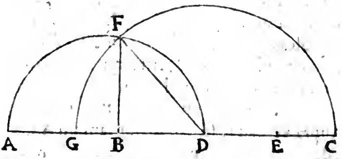
SCHO-

# SCHOLIVM.

QVamuis in hoc Problemate ſint deſignata tantùm duo ſchemata ad euitandam confuſionem, attamen propter diuerſitatem caſus O, & diuerſitatem applicationum parallelogramorum, conſtituerentur 12. Schemata diuerſa, vt experienti patebit. In omnibus tamen caſibus, præterquam in primo, fiet eadem conſtructio.

## LEM. LXXVI. PROP. CXXXIII.

Datam rectam lineam taliter producere, vt quadratum datæ, vna cum duobus rectangulis ſub data, & ſub inuenta, ad quadratum inuētæ: ſit in data proportione.




DAta recta linea ſit A B, quam oportet taliter producere in C, vt quadratum A B, cum duobus rectan-

ctangulis A B C, sit ad quadratum B C, in data proportione, quæ sit ea, quam habet A B, ad B D, ei positam in directum. Super A D, diametro fiat semicirculus, & B D, sumatur dupla B E, à puncto autem B, erigatur normalis B F, & iuncta D F, centro D, interuallo D F, describatur semicirculus secans B E, productam in C, & in G, vbilibet. Dico A B, datam, esse productam in C, sic, vt quadratum A B, cum duobus rectangulis A B C, sit ad quadratum B C, vt A B, ad B D.

Quoniam enim duo rectangula A B D, & C B G, sunt æqualia inter se, quia ambo æqualia eidem quadrato BF, & cum rectangulum C B G, sit æquale rectangulo BCE, quia G B, & C E, sunt æquales, vt facilè patet consideranti. Ergo rectangulum A B D, erit æquale rectangulo B C E. Et communi addito rectangulo C B E. Ergo duo rectangula A B D, & C B E, erunt æqualia rectangulis B C E, & C B E, nempe quadrato B C. Verùm vt A B, ad B D, sic (sumpta communi altitudine A B,) est quadratum A B, ad rectangulum A B D. Pariter vt A B, ad B D, sic (sumpta communi altitudine B C,) est rectangulum A B C, ad rectangulum C B D; vt autem vnum ad vnum, sic duo ad duo. Ergo, & vt A B, ad B D, sic duo rectangula A B C, ad duo rectangula CBD, nempe ad rectangulum C B E. Cùm ergo probatum sit esse. vt A B, ad B D, sic tàm quadratum A B, ad rectangulum A B D, quàm duo rectangula A B C, ad rectangulum C B E. Ergo, & vt A B, ad BD, sic ambo antecedentia ad ambo consequentia, nempe quadratum A B, vna cum duobus rectangulis A B C, ad rectangulũ

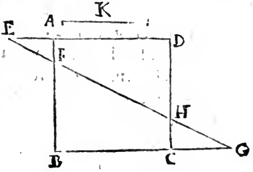
Mm ABD,

A B D, cum rectangulo C B E. Sed istis probatum est supra æquale esse quadratum B C. Ergo, & vt A B, ad B D, sic quadratum A B, cum duobus rectangulis ABC, ad quadratum B C. Quod erat faciendum.

# PROBL. LVIII. PROP. CXXXIV.

## Dato quocumque parallelogrammo, A B C D, & dato puncto G, in B C, producta; ducere G H F E, occurrentẽ D A, productæ in E, vt trapezium F A D H, sit ad triãgulum E A F, in data proportione.

DAta proportio sit, quam habet B C, ad K, & DA, per propos. anteced taliter producatur in E, vt quadratum D A, cum duobus rectangulis D A E, sit ad quadratum A E, vt B C, ad K. Et ducatur G E, secans latera D C, A B, in punctis H, & F. Dico factum esse, quod proponebatur.




Quoniam enim triã-gula DEH, A E F, sunt similia. Ergo triangulum D E H, erit ad triã-gu-

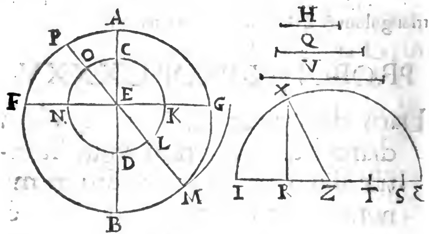
gulum A E F, vt quadratem D E, ad quadratum A E. Et diuidendo, trapezium D A F H, erit ad triangulum A E F, vt excessus quadrati D E, super quadratum A E, ad quadratum A E. sed talis excessus est æqualis quadrato D A, & duobus rectangulis D A E. Ergo, & vt quadratum D A, cum duobus rectangulis D A E, ad quadratum A E, seù vt B C, ad K; sic trapezium D A F H, ad triangulum A E F. Quod erat faciendum.

## PROBL. LIX. PROP. CXXXV.

Datis duobus circulis circa eandem diametrum, quorum vnus sit intra alium, aptare per cētrum minoris lineam in maiori, vt segmēta intercepta inter circumferentias circulorum, sint in data proportione.

DAtorum circulorum diametri sint A B, C D. E verò sit centrum minoris; data verò ratio sit, quam habet D E, ad H. Oportet ducere P O E L M, vt M L, ad P O, sit vt D E, ad H. Vel circuli sunt concētrici; vel excentrici. Si sunt cōcentrici, patet Problema non posse solui nisi in proportione æqualitatis, & tunc omnis linea aptata in maiori circulo transiens per cen-

trum minoris facit propositum. Si verò sunt excentrici, vel se tangunt intus, vel non se tangunt, quamuis notemus tantùm schema, in quo non se tangunt; & proportio vel est æqualitatis, vel inæqualitatis, & si est inæqualitatis, si est maioris inæqualitatis, nequit esse




maior ea, quam habet B D, ad C A. Si verò sit minoris inæqualitatis, nequit esse minor ea, quam habet A C, ad D B. Ratio est, quia ex omnibus segmentis interceptis inter circumferentias linearum aptatarum in circulo maiori, & transeuntium per punctum E, D B, est maximum omnium, & A C, minimum, vt facilè potest probari. His præmissis.

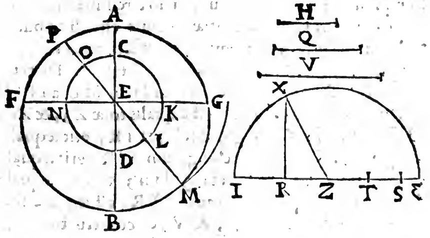
A puncto E, erigatur super A B, E F, secans circumferentiam minoris circuli in N, quæ producatur ad K, G. Et ob euitandam confusionem in schematibus, exponantur seorsim R T, æqualis E K, seù E D, & Q, potens

tens excessū quadrati E G, super quadrato E K; & fiat vt H, ad R T, seu ad E D, sic R T, ad T S, sibi ipsi positam in directum. Et pariter fiat vt H, ad R T, sic Q, ad V; & inter Q, V, inueniatur media proportionalis, cui æqualis fiat R X, erecta normaliter super R T, à puncto R; & diuisa R T, bifariam in Z, & iuncta Z X, centro Z, interuallo Z X, describatur semicirculus secans R T, productam in I, & 3. Deinde centro E, interuallo æquali ipsi T I, describatur portio circumferentiæ circuli occurrens circumferentiæ maioris circuli in puncto M. (Occurret enim semper, vt infra probabitur,) & per puncta M, & E, ducatur linea M L E O P. Dico talem esse ductam, vt sit sicut E D, ad H, sic M L, ad P O.

Quoniam enim tota Z I, est æqualis totæ Z 3, & Z R, est facta æqualis Z S; ergo, & reliqua I R, erit æqualis reliquæ S 3. Quare & rectaugulum S I R, erit æquale rectangulo 3 R I. Sed rectangulum 3 R I, est æquale quadrato X R, quadratum autem X R, est æquale rectangulo contento sub Q, & V, ex constructione. Ergo rectangulum S I R, erit æquale rectangulo contēto sub Q, & V. Quoniam verò supra factum est, vt H, ad R T, sic Q, ad V, vt autem Q, ad V, sic (sumpta communi altitudine Q,) est quadratum Q, ad rectangulum Q, V, & rectangulo Q, V, ostensum est supra æquale rectangulum S I R. Ergo, & vt H, ad R T, sic quadratum Q, ad rectangulum S I R. Pariter quoniā supra factum est, vt H, ad R T, sic R T, ad T S, vt autem R T, ad T S, sic (sumpta communi altitudine I R,) rectangulum T R I, ad rectangulum sub S T, in I R.

Ergo,

Ergo, & vt H, ad R T, sic rectangulum T R I, ad rectangulum sub T S, in I R. Sed & vt H, ad R T, sic supra probatum est esse quadratum Q, ad rectangulum SIR. Ergo & vt quadratum Q, ad rectangulum S I R; sic rectangulum T R I, ad rectangulum cōtentum sub S T, in R I. Cùm ergo sit, vt H, ad R T; sic tàm totū quadratum Q, ad totum rectangulum S I R, quàm ab-




latum rectangulum T R I, ad ablatum rectangulū S T, I R. Ergo, & reliquum ad reliquum erit vt totum ad totū, seù vt H, ad R T. Quare, & vt H, ad R T, sic excessus quadrati Q, super rectangulum T R I, ad rectangulum T I R. Sed R T, est æqualis E D, vel E L; T I, est æqualis ipsi E M; R I, est æqualis ipsi L M; vnde rectangulum T R I, est æquale rectangulo E L M, seù rectangulo sub O E, in L M; rectangulum verò T I R, est æquale rectangulo E M L; quadratum autem Q, est æ-

quale

quale excessui quadrati F G, super quadratum E K. Ergo, & vt H, ad D E, sic excessus quadrati E G, super quadrato E K, minus rectangulo sub O E, in L M, ad rectangulum E M L. Sed quoniam rectangulo F E G, seù quadrato E G, est æquale rectangulum P E M. Ergo, & quadratum E G, minus rectangulo O E, L M, & minus quadrato E K, seù E L, erit æquale rectangulo M E P, minus quadrato E L, & minus rectangulo O E, L M; nempe rectangulo sub E M, in P O. Quia rectangulũ M E P, diuiditur in rectangula M E O, & M E, O P; rectangulum verò M E O, diuiditur in rectangulum L E O, nempe in quadratum L E, & in rectangulum M L, E O. Ergo & vt H, ad D E, sic rectangulũ M E, P O, ad rectangulum E M L. Sed vt rectangulum M E, P O, ad rectangulum E M L, sic (propter eandem altitudinem M E,) est P O, ad L M. Ergo, & conuertendo vt D E, ad H, sic M L, ad P O. Quod erat &c.

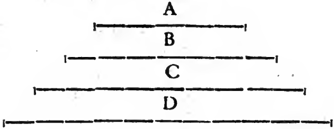
Quòd verò circulus factus cẽtro E, interuallo æquali ipsi H I, semper occurrat circumferentiæ maioris circuli, facilè patebit ex processu demonstrationis, & ex determinationibus Problematis. Quia, si non occurreret, sed caderet vel totus intra, vel totus extra, probaretur eodẽ discursu, proportionem datam esse maiorem ea, quam habet B D, ad C A; vel minorem ea, quam habet C A, ad B D, vt consideranti, & experienti patebit.

LEM-

# LEM·LXXVII·PROP·CXXXVI

Si ſint quatuor rectæ lineæ continue proportionales, erit, vt quadratum primæ minoris, ad exceſſum quadrati mediæ minoris ſuper ipsā ſic media minor ad exceſſum quartæ ſuper ipſam.

SInt quatuor rectæ lineæ A, B, C, D, continue proportionales. Dico eſſe, vt quadratum A, ad exceſſum quadrati B, ſuper quadratum A, ſic B, ad exceſſum D, ſuper ipſam.




Quoniam enim D, C, B, A, ſunt quatuor continue proportionales, erit, vt D, ad B, ita quadratum B, ad quadratum A. Quare, & per conuerſionem rationis, erit vt D, ad exceſſum illius ſuper B, ſic quadratum B, ad exceſſum illius ſuper quadratum A. Ergo, & diuidē-do, vt B, ad exceſsum D, ſuper B. ſic quadratum A, ad exceſsum quadrati B, ſuper ipſum. Quod erat &c.

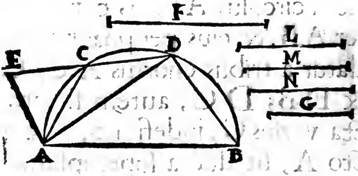
LEM·

# LE. LXXVIII. PROP. CXXXVII.

Sit ſemicirculus A C B, cuius diameter A B, & eius periphæria ſubtendatur à tribus chordis A C, C D, & D B; D C, autem ſit producta verſus C, indefinite, & à puncto A, ſit ducta ſuper ipſam normalis A E. Dico parallelepipedum factum ſub A B, in rectangulum E C D, eſſe æquale ſolido facto ſub D B, in rectangulum A C D.

Dvcatur A D. Quoniam duo anguli A C D, & D B A, ſunt æquales duobus rectis, quia quadrangulum A C D B, eſt in circulo; & pariter duo anguli A C E, & A C D; ſunt æquales duobus rectis. Ergo duo ſunt æquales duobus. Quare communi ablato angulo A C D, ergo angulus A C E, erit æqualis angulo A B D. Et pariter angulus rectus A E C, eſt æqualis angulo recto A D B. Quare, & reliquus erit æqualis reliquo; & triangulum A E C, erit ſimile triangulo A D B. Ergo, vt E C, ad C A, ſic D B, ad B A. Sed

vt E C, ad C A, ſic (ſumpta communi altitudine C D,) eſt rectangulum E C D, ad rectangulum A C D. Ergo




& vt D B, ad B A, ſic rectangulum E C D, ad rectangulum A C D. Ergo ſolidum factum ſub extremis erit æquale facto ſub medijs. Ergo factum ſub D B, in rectangulum D C A, erit æquale facto ſub A B, in rectangulum E C D. Quod erat oſtendendum.

## LE.LXXIX. PROP. CXXXVIII.

Datis iiſdem, quæ ſupra. Dico quadratum A B, eſſe æquale tribus quadratis A C, C D, D B, & duobus rectangulis E C D.

NAM quadratum A B, eſt æquale duobus quadratis B D, & D A. Quadratum autem D A, eſt

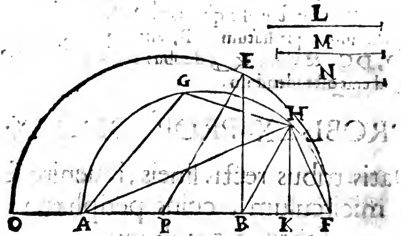
est æquale duobus quadratis A E, & E D, quia tam angulus A E D, quam A D B, sunt recti. Quadratum autem E D, est æquale quadrato E C, quadrato C D, & duobus rectangulis E C D; & pariter duo quadrata A E, E C, sunt æqualia quadrato A C. Ergo à primo ad vltimum; quadratum A B, erit æquale quadratis B D, D C, & C A, & duobus rectangulis E C D. Quod erat ostendendum.

## PROBL. LX. PROP. CXXXIX.

### Datis tribus rectis lineis, inuenire semicirculum, cuius periphæria subtendatur ab ipsis.

Datæ tres rectæ lineæ sin L, M, N, & oporteat facere, quod imperatum est. Tunc vel omnes sunt inæquales, vel sunt duæ illarum æquales. Si duæ sunt æquales soluetur Problema per locum planũ. Sint ergo L, & M, æquales, & ipsi N, fiat æqualis A B. A' puncto B, erigatur perpendicularis B E, cuius quadratum sit duplum quadrati L, vel M, & diuidatur A B, bifariam in P, & iungatur P E. Centro autem P, interuallo P E, describatur semicirculus, cui occurrat A B, producta in punctis O, & F, & super A F, tamquam supra diametro fiat semicirculus A G F, & à puncto A, aptetur A G, æqualis A B, & circumferentia G F, secetur bifariam in H, & iungantur G H, H F, & H B, & du-

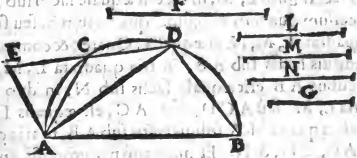
catur à puncto H, perpendicularis H K, ipsi A F. Dico G H, & H F, esse æquales ipsi L, & M, & semicirculũ A G F, esse quæsitum.




Quoniam enim circumferentia G F, est secta bifariam in H. Ergo angulus G A H, est æqualis angulo H A B. Sed etiam duæ lineæ G A, A H, sunt æquales duabus lineis H A, A B, altera alteri. Ergo triangulũ G A H, erit æquale triangulo H A B, & G H, erit æqualis H B. Sed G H, est æqualis H F. Ergo B H, erit æqualis H F. Quoniam autem duobus quadratis B K, & K H, est æquale quadratum B H, & pariter duobus quadratis H K, K F, est æquale quadratum H F, & duo quadrata B H, & H F, sunt inter se æqualia, quia & latera B H, & H F, ostensa sunt æqualia. Ergo duo quadrata B K, H K, erunt æqualia duobus quadratis H K, K F. Et communi ablato quadrato H K. Ergo, quadratum B K, erit æquale quadrato K F, & B K, erit æqua-

æqualis K F. Ergo rectangulum A F B, erit duplum rectanguli A F K. Sed rectangulo A F B, est æquale rectangulum O B F, quia B F, est æqualis O A; & rectangulum O B F, est æquale quadrato B E; & pariter rectangulum A F K, est æquale quadrato F H. Quare, & quadratum B E, erit duplum quadrati F H. Sed pariter, quadratum B E, factum est duplum quadrati L, vel M. Ergo quadratum F H, est æquale quadratis L, vel M, & F H, & H G, sunt æquales ipsis L, & M, & A G, facta est, æqualis A B, seu N. Ergo inuentus est semicirculus &c.

SI verò tres L, M, & N, sint inæquales, soluetur Problema per locum solidum, demonstratione comprehendente etiam casum antecedentem. Exponatur linea F, potens simul tria quadrata L, M, N, & fiat vt quadratum F, ad duplum rectangulum contentum sub M, & N, sic L, ad G; & data F, minori extrema, & G, differentia secundæ, & quartæ in ordine quatuor continue




proportionalium, inueniatur secunda A B, quæ fiat dimetiens semicirculi. Quoniam A B, est maior F, hoc

est tribus quadratis L, M, & N. Quare, si aptentur duæ ipsarum L, M, & N, in semicirculo, cuius diameter A B, ipsum totum non occupabunt. Aptetur A C, æqualis L, & C D, æqualis M, & D B, ducatur. Dico D B, esse æqualem N, & semicirculum A C D B, esse quæsitum. Producatur D C, versus C, indefinite, cui à puncto A, occurrat perpendicularis A E, & ducatur A D. Quoniam sunt quatuor continue proportionales, quarum prima minor est F, & G, est excessus quartæ super secundam, & A B, est secunda. Ergo per proposit. 136. erit vt quadratum F, ad excessum quadrati A B, super ipsum, ita erit A B, ad G. Ergo factum sub quadrato F, in G, erit æquale facto sub excessu quadrati A B, super quadratum F, in A B. Pariter quoniam supra factum est vt quadratum F, ad duplum rectangulum contentum sub M, & N, sic L, ad G. Ergo factum sub quadrato F, in G, erit æquale solido contento sub duplo rectangulo M, N, in L, seù solido contento sub duplo rectangulo L, M, in N. Quare solidum contentum sub duplo rectangulo L, M, in N, erit æquale facto sub A B, in excessum quadrati A B, super quadratum E, seu super tria quadrata L, M, N, ei æqualia. Quare, & communibus additis factis sub A B, in tria quadrata L, M, N. Ergo cubus A B, erit æquale factis sub N, in duo rectangula L, M, seù A C D, quia A C, est æqualis L, & C D, est æqualis M, & solidis factis sub A B, in tria quadrata A C, C D, & N. Et quoniam per proposit. antec. quadratum A B, æquatur quadratis A C, C D, D B, & duobus rectangulis E C D. Ergo, & cubus A B, erit æ-

quale

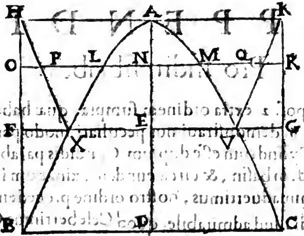
quale factis sub A B, in tria quadrata A C, C D, D B, & in duo rectangula E C D. Ergo & hæc facta erunt æqualia factis sub A B in quadrata L, & M, seù in quadrata A C, C D, & in quadratum N, & in duo rectangula A C D. Et communibus ablatis factis sub A B, in quadrata A C, C D. Ergo factum sub A B, in quadratum D B, cum facto sub A B, in duo rectangula E C D, seù sub D B, in duo rectangula A C D, quæ illis sunt æqualia, per proposit 137 erunt æqualia factis sub AB, in quadratum N, & sub N, in duo rectangula A C D. Ex vtraque parte sunt duo æqualia, nempe duo rectangula A C D, & A B. Ergo, & N, erit æqualis D B. Quod erat ostendendum.

# APPENDIX
## Pro Indiuisibilibus.

PRopos. 2 extra ordinem sumpta, quæ habetur pag. 116. demonstrauimus peculiari modo per Indiuisibilia, Cylindrum esse duplum Conoidis parabolici super eandem basim, & circa eundem axim cum ipso. At nunc animaduertimus, nostro ordine procedendi, posse concludi illud admirabile, quod Celeberrimus Galilæus habet in postremis Dialogis, pag. apud nos 28. Nimirũ circuli circumferentiam æqualem esse puncto. Modum Galilæi videat Lector, loco supra citato. Noster autem sequens est non aliter discrepans à Methodo Galilæi, nisi quia vtimur solidis diuersi ab ijs, quibus ipse vtitur.

Pro-

Proposit. ergo supra citata, cuius schema denuo ponimus ostendebamus, quod si accepto in A E, vbilibet puncto N, per quod ordinatim applicaretur O P L N, semper verum esse circulum, cuius radius O N, æquari circulis, quorum radij P N, N L. Sed non solùm hoc verum est, sed etiam armillam circularem signatam litteris O P Q R, æqualem esse circulo L N M. Quod patet faciliter; quia cùm quadratum O N, sit æquale tam duobus quadratis P N, N L, quàm quadrato P N, & rectangulo O P R, sequitur (dempto communi quadrato P N;) rectangulum O P R, remanere æquale quadrato L N; ac proinde, armillam O P Q R, esse æquale circulo L N M; & cum hoc semper verificetur, etiam verificari, excessum Cylindri H G; qui signatur litteris H F X V G K, supra frustum parabolicũ HXVK, æqualem esse portioni Conoidis X A V, tàm secundum




totum,

totum, quàm secundum partes. Vnde cum v g. pars HOPQRK, sit æqualis LAM, portioni conoidis, & hoc semper verum sit; sequitur etiam, quod cum tandem ex continua diuisione deueniamus ad circumferétiam, cuius diameter HK, & ad A, verticem conoidis, etiam circumferentiam esse æqualem vertici, nempe puncto. Circa hoc non immoror, quia facilissimè, & clarissimè explicatur à Galilæo, ac eodem modo debet in casu nostro philosophari.

At P. Marius Bettinus Societatis Iesu, Vir, qui cum fuerit author Apiariorum potest Apis nuncupari; quia sicut hæc habet vnde, & mellificet, & pungat, sic hic mellificat, suauissimam doctrinam docendo, pungitque suo aculo non rectè de Mathematicis, secundum ipsum, sentientes. At Apis infelix, quæ stimulum ammittens feriendo Indiuisibilia, periclitata est. Author ergo iste parui pendens, quæ in paradoxo Galilæi ait Illustrissimus Interlocutor Sagredo Conciuis meus verbis, quæ loco Galilæi citato, possunt conspici, tom.3. sui Ærarij pareg Geom.schol.1 & alibi, notat aliqualiter Galilęi paradoxum, vnde, nec nostrum omnimodè ei placeret. Admonet ergo nõ esse intelligendum, circumferentiam æqualem esse puncto sic absolutè, & Geometricè, sed physicè. Attamen deducimus ex hoc veritatem pulcherrimam, nimirum inter physica indiuisibilia vnum aliud multum physicè excedere. Nam cùm verum sit, physicè loquendo, circumferentiam, cuius diameter HK, æqualem esse puncto A, & possimus concipere Cylindrum in infinitum basium maiorum, & in eo inscriptũ

Conoi-

Conoides, vt supra factum est, & semper circumferentia sit æqualis, physicè loquendo, vertici conoidis, & tamen, & hæ circumferentiæ, & hi vertices sint quantitates physicæ, adeò vt inter ipsas cadat vera proportio æqualitatis. Sequitur, quod permutando, quam proportionem habet circumferentia maior, & vt ita dicam, maxima, ad paruissimam circumferentiam, hanc eandem habeat vertex conoidis maximi ad verticẽ conoidis paruissimi. Vnde vertex conoidis maximi excedet, vt ita dicam, infinitè, verticem conoidis paruissimi; & tamen vterque vertex, est punctum physicè indiuisibile. Et vtique admirabilissimum est considerare, quantum possimus concipere distrahi indiuisibile physicum, vt vertex coni, vel conoidis, physicè accepti, æquetur circumferentiæ circuli, quæ causa suę immensitatis, quæ potest concipi, infinita queat appellari.

Verùm P. Bettinus loc. sup. cit. §. 28. &c. adducit paradoxum longè, vt ipse appellat, mirissimum; nimirum, non solum circumferentiam, sed circulum totum, æqualem esse puncto. Sed vt ignorantiam meam liberè fatear, tale paradoxũ tali pacto mihi videtur mirissimũ, vt intelligentiam meam effugiat. Contra tale paradoxum aliqua Geometrice obijcerem, sed nolo verba habere cũ mortuis. Videat Lector tale paradoxum loco citato, & forsitan agnoscet, quam melius fuisset Bettino per indiuisibilia procedere, quam irrationabili liuore ipsa spernere. Sic enim ab indiuisibilibus abhorret, vt quasi ipsa lutum sint, ipse verò Armellinus, cupiat potius mori, quam fędari. Sic enim loc. sup. cit. Schol. 2. de Indiui-

sibi-

ſibilibus loquitur: *In poſtremis reſpondeo impingentibus mihi ſimilitudinem phyloſophantium circa figuras Geometricas per indiuiſibilia. Longè longius à me abſit fruſtrari Geometricas meas theorias optato fine demonſtratæ veritatis. Quod fieret ſi (contra 4. definitionem lib. 5. & ſcholia noſtra ad eam) compararem inter ſe, quæ Geometricam inter ſe proportionem non habent, qualis eſt comparatio figurarum, & phyloſophatio circa eas per indiuiſibilia.* Intelligis ergo Lector, quomodo author iſte in indiuiſibilia incidens, quaſi ſibi Dæmones occurrerent exclamet: *Longè longius à me abſit &c.* Sed cum contra indiuiſibilia Author iſte anno 1648. nihil, præter nouum liuorem, noui adducat ab ijs, quæ contra ea obiecit Paulus Guldinus in ſua centrobarica, quibus abundè ſatisfecit ipſemet Indiuiſibilium inuentor Bonauentura Caualerius in ſuis exercitationibus Geometricis exercitat. 3. anno 1647. quo, maxima Matheſis iactura, vitam cum morte cõmutauit; ideò nec nos circa hoc debemus nouiter verba profundere.

# SCHOLIVM.

HÆc ſunt, Benigne Lector, quæ pro hac vice determinauimus tibi legẽda proponere. Quamplurima adhuc tenemus diuerſis temporibus à nobis elaborata, pręcipuè circa proportiones Superficierum Sphęricarum, & Conicarum, quę ſuis temporibui tradentur, ſi Deus ſanitatem, & vitam impertierit. Hęc perlege, ſi tibi placet, reliqua in non modica quanti-

tate

tate, vel his pulchriora, vel his turpiora expecta. Tabellam errorum, vt moris est, tradere, non exhibemus, sed ipsos corrigere tuæ industriç relinquimus, prçcipuè cum adhibita aliquali diligentia, faciliter cognosci possint. Et vale.



FINIS.

292